

UNIVERZITET U NOVOM SADU
FAKULTET TEHNIČKIH NAUKA

TESTOVI IZ ALGEBRE

Rade Doroslovački
Ljubo Nedović

Novi Sad, 2016.

Edicija: „TEHNIČKE NAUKE - UDŽBENICI”

Naziv udžbenika: „Testovi iz algebre”

Autori: Rade Doroslovački
Ljubo Nedović

Recenzenti: prof. dr Zoran Stojaković, Prirodno - matematički fakultet u Novom Sadu
prof. dr Ilija Kovačević, Fakultet tehničkih nauka u Novom Sadu

Izdavač: Fakultet tehničkih nauka, Univerzitet u Novom Sadu

Glavni i odgovorni urednik:
Prof. dr Rade Doroslovački, dekan Fakulteta tehničkih nauka, Univerzitet u Novom Sadu

Priprema i štampa: FTN - Grafički centar GRID, Trg Dositeja Obradovića 6, Novi Sad

Štampanje odobrio:
Savet za bibliotečku i izdavačku delatnost Fakulteta tehničkih nauka, Univerzitet u Novom Sadu

Predsednik Saveta za bibliotečku i izdavačku delatnost:
Dr Radoš Radivojević, redovni profesor Fakulteta tehničkih nauka, Univerzitet u Novom Sadu

Ауторска права припадају издавачу

CIP-Katalogizacija u publikaciji
Библиотека Матице српске, Нови Сад

512(075.8)(079.1)

DOROSLOVAČKI, Rade

Testovi iz algebre / Doroslovački Rade, Nedović Ljubo. - 1. izd. - Novi Sad : Fakultet tehničkih nauka, 2016 (Novi Sad : Grid). - 88 str. ; 24 cm. - (Edicija "Tehničke nauke - udžbenici" ; 599)

Тираж 600. - Библиографија.

ISBN 978-86-7892-862-8

1. Nedović, Ljubo [autor]

a) Algebra - Testovi
COBISS.SR-ID 309162503

KOLOKVIJUM 1, PRIMER 1

- Za relaciju poretka $\subseteq$ skupa $A = \{A, B, C, D\}$, gde je $A = \{a, b\}$, $B = \{b, c\}$, $C = \{a, b, c\}$, $D = \{b\}$ i navesti: najmanji el: $\emptyset$ minimalne el: $\emptyset$ najveći el: C maksimalne el: C

- Zaokružiti brojeve ispred sirjektivnih funkcija:

~~1~~ $f: (0, \frac{\pi}{4}) \rightarrow (0, \infty)$, $f(x) = \tan x$

~~2~~ $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3 - x$

~~3~~ $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$

4 $f: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$, $f(x) = x^2$

5 $f: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, $f(x) = x^2$

6 $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x$

- Zaokružiti brojeve ispred tvrđenja koja su tačna u svakoj Bulovoj algebri $(B, +, \cdot, ', 0, 1)$:

1 $(a')' = a$

2 $a + a' = 0$

3 $a \cdot 0 = 0$

~~4~~ $1 + a = a$

~~5~~ $(a + b)' = a' + b'$

- Koreni (nule) polinoma $x^2 - i$ su:

1 $e^{i\frac{\pi}{4}}$

2 $e^{-i\frac{\pi}{4}}$

3 $-e^{i\frac{\pi}{4}}$

4 $-e^{-i\frac{\pi}{4}}$

- Odrediti realni i imaginarni deo, moduo, argument, i konjugovani broj kompleksnog broja $z = \sqrt{3} - i$:

$Re(z) = \sqrt{3}$

$Im(z) = -1$

$|z| = 2$

$\arg(z) = -\frac{\pi}{6}$

$\bar{z} = \sqrt{3} + i$

- Sledeće kompleksne brojeve napisati u algebarskom obliku:

$e^{i\pi} = -1$

$2e^{i\frac{\pi}{2}} = 2i$

$2e^{0 \cdot i} = 2$

$e^{-i\pi} = -1$

$e^{-i\frac{3\pi}{2}} = i$

- Zaokružiti brojeve ispred struktura koje su komutativni, asocijativni, grupoidi sa neutralnim elementom.

~~1~~ $(\mathbb{N}, +)$

2 $(\mathbb{N}, \cdot)$

3 $(\mathbb{R}, +)$

4 $(\mathbb{R}, \cdot)$

5 $(\{-1, 1\}, \cdot)$

6 $([0, \infty), \cdot)$

- Pri deljenju polinoma $x^8 - 2x^4 + 1$ sa $x^2 + 1$ nad $\mathbb{R}$, količnik je $x^6 - 2x^2 + 1$, a ostatak je 0

- Zaokružiti broj (ili brojeve) ispred tvrđenja koja su tačna u svakoj grupi $(P, \cdot)$ u kojoj je h neutralni element, a sa x^{-1} je označen inverzni element od elementa x :

~~1~~ $a \cdot h = h$

2 $a^{-1} \cdot a = h$

3 $h \cdot h = h$

4 $h^{-1} = h$

5 $(a \cdot b)^{-1} = b^{-1} \cdot a^{-1}$

~~6~~ $a \cdot a = a$

- Koreni (nule) polinoma $x^2 - x\sqrt{2} + 1$ su:

1 $e^{i\frac{\pi}{4}}$

2 $e^{-i\frac{\pi}{4}}$

3 $-e^{i\frac{\pi}{4}}$

4 $-e^{-i\frac{\pi}{4}}$

- NZD za polinome $x^2 - x\sqrt{2} + 1$ i $x^2 - i - 1$ Ne postoji 2 je linearni polinom 3 je konstantni polinom

- Zaokružiti slova (ili slovo) ispred jednakosti koje su tačne u skupu kompleksnih brojeva:

a $z\bar{z} = |z|^2$

b $\frac{z_1}{|z_1|} = \frac{z_2}{|z_2|} \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{R}^+) \vec{Oz_1} = k\vec{Oz_2}$

c $\bar{z} \in \mathbb{R} \Rightarrow z = \bar{z}$

d $z_1 + z_2 = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$

~~e~~ $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$

f $\arg z_1 = \arg z_2 \Leftrightarrow \frac{z_1}{|z_1|} = \frac{z_2}{|z_2|}$

g $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$

h $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

~~i~~ $z \neq 0 \Rightarrow z^{-1} = |z|^2 \bar{z}$

j $|z| = 1 \Rightarrow z^{-1} = \bar{z}$

- Izračunati:

a) $\arg(-13i) = -\frac{\pi}{2}$

b) $\arg(6) = 0$

c) $\arg(-9) = \pi$

d) $\arg(2i) = \frac{\pi}{2}$

e) $\arg(-1 + i) = \frac{3\pi}{4}$

f) $\arg(-1 + i\sqrt{3}) = \frac{2\pi}{3}$

g) $\arg(0) = \text{nedefinisano}$

h) $\arg(2 + i)(3 + i) = \frac{\pi}{4}$

- Napisati Kejljeve tablice grupoida $(\mathbb{Z}_4, +)$ i $(\mathbb{Z}_4, \cdot)$, odrediti inverzne elemente i izračunati:

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

·	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

$-0 = 0$, $-1 = 3$, $-2 = 2$, $1^{-1} = 1$, $2^{-1} = 1$, $(1 + 2^3)^{-1} = 1$, $((-1)^{-1} + 2^3)^{-1} = 3$, $(2 + 2^3)^2 = 0$.

Da li je $(\mathbb{Z}_4, +)$ Abelova grupa? DA NE.

Zaokruži tačan odgovor.

- Da li je $\rho = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (4, 1), (3, 1), (2, 1)\}$

relacija poretka skupa $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$: DA NE, i ako jeste, nacrtati njen Hasov dijagram. Odrediti minimalne: 5 , maksimalne: 7 ,

najveći element: 7 i najmanji element: 5

- Neka je $z = 6$, $u = 4 + i$ i $w = 5 + 3i$. Rotacijom tačke z oko tačke u za ugao $\frac{\pi}{2}$ dobija se tačka $5 + 11i$, translacijom tačke z za vektor w dobija se tačka $11 + 3i$, a $\angle wuz = -\frac{\pi}{2}$

- 1) Napisati primere konačnog prstena bez jedinice $(A, +, \cdot)$ i beskonačnog prstena bez jedinice $(B, +, \cdot)$.

$$A = \{\mathbb{Z} \setminus \{1\}\}$$

$$B = \{x \mid x \in \mathbb{Z}\}$$

- 2) Ako je p polinom stepena 2 nad nekim poljem $\mathbb{R}$ i ako ima tačno jedan koren u tom polju, tada je p :
- 1) uvek svodljiv 2) uvek nesvodljiv 3) nekada svodljiv a nekada nesvodljiv 4) ništa od prethodnog 5) uvek normalizovan

- 3) U skupu $\mathbb{R}$ date su relacije: $\rho_1 = \{(x, 1) \mid x \in \mathbb{R}\}$, $\rho_2 = \{(x, y) \mid x^2 = y^2, x, y \in \mathbb{R}\}$,
 $\rho_3 = \{(x, 3x) \mid x \in \mathbb{R}\}$, $\rho_4 = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R}, y \in [x, x+1]\}$, $\rho_5 = \{(2, 5)\}$, $\rho_6 = \{(x^2, x) \mid x \in \mathbb{R}\}$

Iza oznake svake od tih relacija zaokružiti samo ona slova koja označavaju svojstvo relacije koju ona poseduje: R- refleksivnost S- simetričnost A- antisimetričnost T- tranzitivnost.

$$\rho_1: R S \textcircled{A} T \quad \rho_2: R S \textcircled{A} T \quad \rho_3: R S \textcircled{A} T \quad \rho_4: R S \textcircled{A} T \quad \rho_5: R S \textcircled{A} T \quad \rho_6: R S \textcircled{A} T$$

- 4) Neka je A najveći podskup od $(0, \infty) = \mathbb{R}^+$ a B najmanji podskup skupa $\mathbb{R}$ za koje je funkcija $f: A \rightarrow B$ definisana sa $f(x) = \sqrt{1-x^2}$. Tada je $A = (0, 1]$, $f(\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ i $B = [0, 1]$. Funkcija $f: A \rightarrow B$ je:

- 1) surjektivna ali ne injektivna 2) injektivna ali ne surjektivna 3) niti injektivna niti surjektivna
 4) bijektivna 5) $f^{-1}: O \rightarrow S$, $f^{-1}(x) = \sqrt{1-x^2}$, $O = (0, 1)$, $S = \{\frac{\sqrt{3}}{2}\}$

- 5) Neka je $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ i $B = \{1, 2, 3\}$. Odrediti broj elemenata sledećih skupova funkcija ako $f \nearrow$ označava rastuću funkciju f i $f \searrow$ označava neopadajuću funkciju f :

$$\begin{aligned} |\{f \mid f: A \rightarrow B\}| &= 3^5 \\ |\{f \mid f: A \xrightarrow{1-1} B\}| &= 0 \\ |\{f \mid f: A \rightarrow B \wedge f \nearrow\}| &= 0 \\ |\{f \mid f: B \xrightarrow{na} B\}| &= 3 \\ |\{f \mid f: B \rightarrow A\}| &= 3^5 \\ |\{f \mid f: A \xrightarrow{1-1} A\}| &= 5! \\ |\{f \mid f: B \rightarrow A \wedge f \searrow\}| &= \frac{5!}{2!} \\ |\{f \mid f: A \setminus \{5\} \xrightarrow{na} B\}| &= 3 \cdot \frac{4!}{2!} \end{aligned}$$

- 6) Neka je A najveći podskup od $\mathbb{R}$ a B najmanji podskup skupa $\mathbb{R}$ za koje je $f: A \rightarrow B$ definisana sa $f(x) = \ln(x^2 - e)$. Tada je $A = (-\infty, -\sqrt{e}) \cup (\sqrt{e}, \infty)$ i $B = (-1, \infty)$. Funkcija $f: A \rightarrow B$ je: 1) bijektivna

- 2) surjektivna ali ne injektivna 3) injektivna ali ne surjektivna 4) niti injektivna niti surjektivna

- 7) Funkcija $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ definisana sa $f(x) = \ln x$: 1) je izomorfizam $(\mathbb{R}^+, \cdot) \rightarrow (\mathbb{R}, +)$ 2) je homomorfizam $(\mathbb{R}^+, \cdot) \rightarrow (\mathbb{R}, +)$ 3) ima inverznu f^{-1} 4) f^{-1} je homomorfizam $(\mathbb{R}^+, \cdot) \rightarrow (\mathbb{R}, +)$ 5) f^{-1} je izomorfizam $(\mathbb{R}^+, \cdot) \rightarrow (\mathbb{R}, +)$

- 8) Zaokružiti broj (ili brojeve) ispred tvrdjenja koje je tačno u Bulovoj algebri $B = (B, +, \cdot, ', 0, 1)$.

- 1) $xx = x+x$ 2) $xy = x+y$ 3) $xx' = (x+1)'$ 4) $xy = 1 \Rightarrow x = 1$ 5) $xy = 0 \Rightarrow (x = 0 \vee y = 0)$
 6) $(x = 0 \vee y = 0) \Rightarrow xy = 0$ 7) $x = xy + xy'$ 8) $(\forall x \in B)(\exists y \in B) x + y = 1 \wedge xy = 0$

- 9) Zaokružiti grupoide sa neutralnim elementom, koji nisu grupe: 1) $(\mathbb{Z}_7 \setminus \{1, 3, 5\}, \cdot)$ 2) $(\mathbb{Z}_7 \setminus \{1, 3, 5\}, +)$
 3) $(\{f \mid f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}, \circ)$ 4) $(\mathbb{N} \cup \{0\}, +)$ 5) $(\mathbb{Z}, \cdot)$ 6) $(\{7k \mid k \in \mathbb{Z}\}, \cdot)$ 7) $(\mathbb{R}[x], \cdot)$

- 10) Zaokružiti podgrupe grupe $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$: 1) $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, +)$ 2) $((0, \infty), \cdot)$ 3) $((-\infty, 0), \cdot)$ 4) $(\{e^{i\theta} \mid \theta \in \mathbb{R}\}, \cdot)$
 5) $(\mathbb{Z} \setminus \{0\}, \cdot)$ 6) $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, +)$ 7) $((0, 1), \cdot)$ 8) $(\{-1, 1\}, \cdot)$ 9) $(\{-1, i, 1, -i\}, \cdot)$ 10) $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$

- 11) Zaokružiti brojeve (ili broj) ispred struktura koje su domeni integriteta: 1) $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, +, \cdot)$ 2) $(\mathbb{R}[t], +, \cdot)$
 3) $(\mathbb{Z}_4, +, \cdot)$ 4) $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ 5) $(\mathbb{Z}_3, +, \cdot)$ 6) $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ 7) $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ 8) $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$

- 12) Zaokružiti oznaku polja za koje važi da je polinom $t^4 + t^2 + 1$ nesvodljiv nad njima. $\mathbb{Q} \mathbb{R} \mathbb{C} \mathbb{Z}_2 \mathbb{Z}_3 \mathbb{Z}_5$

- 13) Ako je p polinom stepena 3 nad poljem $\mathbb{R}$, tada je p nad poljem $\mathbb{R}$:

- 1) uvek svodljiv 2) uvek nesvodljiv 3) ništa od prethodnog.

- 14) $f \in \mathbb{R}[x]$, $f(a+ib) = 0$, $b \neq 0$. Zaokruži tačno: a) $x - a + ib \mid f(x)$ b) $x - a - ib \mid f(x)$ c) $x - e^{ia} \mid f(x)$
 d) $x^2 - 2ax + a^2 + b^2 \mid f(x)$; e) $x^2 + 2ax + a^2 + b^2 \mid f(x)$; f) $x^2 - ax + a^2 + b^2 \mid f(x)$; g) $x - e^{-ia} \mid f(x)$

- 15) Ako je $A = \{e^{i\psi} + e^{i\psi} \mid \psi \in \mathbb{R}\}$ i $B = \{1 - e^{i\psi} \mid \psi \in \mathbb{R}\}$ tada je: a) $A \cap B \neq \emptyset$, b) $A \subset B$,
 c) $A \subseteq B$, d) $A \not\subseteq B$, e) $A \supseteq B$, f) $A \not\supseteq B$, g) $A \supset B$, h) $A \cap B = \emptyset$, i) $A = B$.

- 16) Neka je $\{i, -i\}$ skup nekih korena polinoma $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, gde su $a, b, c \in \mathbb{R}$. Tada skup svih vrednosti za a, b i c je: $a = c$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$

KOLOKVIJUM 1, PRIMER 2

1. Iza oznake svake od datih relacija u skupu $\mathbb{Z}$ zaokružiti samo ona slova koja označavaju svojstvo relacije koju ona poseduje: R - refleksivnost S - simetričnost A - antisimetričnost T - tranzitivnost.
 $\leq: \underline{R}, \underline{S}, \underline{A}, \underline{T}$ $<: R, S, \underline{A}, \underline{T}$ $\equiv_3$ definisana sa $x \equiv_3 y \Leftrightarrow 3|(x-y): \underline{R}, \underline{S}, \underline{A}, \underline{T}$
2. Neka je funkcija $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ definisana sa $f(x) = 2^x$. Tada je: 1) $f^{-1}(x) = x^2$, 2) $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$,
3) $f^{-1}(x) = \log_2 x$, 4) $f^{-1}(x) = 2^{-x}$, 5) $f^{-1}(x) = \frac{2}{x}$, 6) $f^{-1}(x) = \log_{\frac{1}{2}} x^{-1}$, 7) $f^{-1}(x) = \log_2 \frac{1}{x}$.
3. Ako su P i Q polinomi i $dg(P) = 3$ i $dg(Q) = 4$, tada je $dg(PQ) = 7$ i $dg(P+Q) = 4$.
4. Zaokružiti brojeve ispred tvrdjenja koja su tačna u Bulovoj algebri.
1) $c + ab = (b+c)(a+c)$ 2) $(ab)' = a' + b'$ 3) $(aa)' = a' + a'$ 4) $(a+b)' = a' + b'$
5) $(a+a)' = a' + a'$ 6) $1+1=0$ 7) $1+a=0'$ 8) $1+a=1 \cdot a$
5. Zaokružiti brojeve ispred struktura koje su asocijativni grupoidi sa neutralnim elementom (tj. monoidi):
1) $(\mathbb{Z}, +)$ 2) $(\{-1, 0, 1\}, \cdot)$ 3) $(\{-1, 1\}, \cdot)$ 4) $(\mathbb{N} \cup \{0\}, +)$ 5) $(\mathbb{C}, \cdot)$ 6) $(\{-1, 0, 1\}, +)$ 7) $(\{2k | k \in \mathbb{Z}\}, \cdot)$
6. Za kompleksne brojeve $z_1 = 1 + i$ i $z_2 = 2 - 2i$ izračunati
 $z_1 + z_2 = 3 - i$ $z_1 \cdot z_2 = 4$ $\frac{z_2}{z_1} = -2i$ $\arg(z_2) = -\frac{\pi}{4}$ $|z_2| = 2\sqrt{2}$
7. Koreni (nule) polinoma $x^2 - i$ su: 1) $e^{i\frac{\pi}{4}}$, 2) $e^{-i\frac{\pi}{4}}$, 3) $-e^{i\frac{\pi}{4}}$, 4) $-e^{-i\frac{\pi}{4}}$.
8. Odrediti realni i imaginarni deo, moduo, argument, i konjugovani broj kompleksnog broja $z = -1 - i\sqrt{3}$:
 $Re(z) = -1$ $Im(z) = -\sqrt{3}$ $|z| = 2$ $\arg(z) = -\frac{2\pi}{3}$ $\bar{z} = -1 + i\sqrt{3}$.
9. Sledeće kompleksne brojeve napisati u algebarskom obliku:
 $e^{i\pi} = -1$ $2e^{i\frac{\pi}{2}} = 2i$ $e^{i2k\pi} = 1$ $2e^{0 \cdot i} = 2$ $e^{i(2k+1)\pi} = -1$ $e^{-i\pi} = -1$ $e^{-i\frac{3\pi}{2}} = i$
10. Pri deljenju polinoma $x^5 + 1$ sa $x + 1$ nad $\mathbb{R}$, količnik je $x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$, a ostatak je 0.

11. Ako su P i Q polinomi, $P+Q \neq 0$ i $dg(P) = 2$ i $dg(Q) = 2$, tada je $dg(PQ) \in \{4\}$ i $dg(P+Q) \in \{2, 4\}$.
12. Ako je $z_1 \neq w$, $z_2 \neq w$, $z_1 \neq 0$ i $z_2 \neq 0$, tada važi:
1) $\arg z_1 = \arg z_2 \Leftrightarrow \frac{z_1}{|z_1|} = \frac{z_2}{|z_2|} \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{R}^+) \overrightarrow{Oz_1} = k \overrightarrow{Oz_2}$ 2) $\arg(z_1 - w) = \arg(z_2 - w) \Leftrightarrow \frac{z_1 - w}{|z_1 - w|} = \frac{z_2 - w}{|z_2 - w|}$
3) $(\exists k \in \mathbb{R}^+) \overrightarrow{wz_1} = k \overrightarrow{wz_2} \Leftrightarrow \frac{z_1 - w}{|z_1 - w|} = \frac{z_2 - w}{|z_2 - w|}$ 4) $(\exists k \in \mathbb{R}^+) \overrightarrow{wz_1} = k \overrightarrow{wz_2} \Leftrightarrow \arg(z_1 - w) = \arg(z_2 - w)$
5) Množenjem kompleksnog broja realnim pozitivnim brojem argument se ne menja.
6) Brojevi iz $\mathbb{C}$ koji pripadaju istoj polupravoj koja ishodi iz koordinatnog početka imaju jednake argumente.
7) Množenje broja $z \in \mathbb{C}$ realnim brojem k je homotetija sa centrom $O(0, 0)$ i koeficijentom k tj. $H_{O,k}(z)$.
13. Zaokružiti tačne iskaze: 1) $\{z | \arg z > 0\} = \{z | Im(z) > 0\} \cup \mathbb{R}^-$
2) $\{z | \arg z \geq 0\} = \{z | Im(z) \geq 0\} \setminus \{0\}$ 3) $\{z | -\frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{\pi}{2}\} = \{z | Re(z) > 0\}$
4) $\{z | -\frac{\pi}{2} \leq \arg z \leq \frac{\pi}{2}\} = \{z | Re(z) \geq 0\} \setminus \{0\}$ 5) $\{z | -\frac{\pi}{2} < \arg z \leq \frac{\pi}{2}\} = \{z | Re(z) > 0\} \cup \{xi | x > 0\}$
6) $\{z | -\frac{\pi}{2} \leq \arg z < \frac{\pi}{2}\} = \{z | Re(z) > 0\} \cup \{xi | x < 0\}$
14. Zaokružiti broj (ili brojeve) ispred tvrdjenja koja su tačna u svakoj grupi $(P, \cdot)$ u kojoj je e neutralni element, a sa x^{-1} je označen inverzni element od elementa x :
1) $a \cdot e = e$ 2) $a \cdot x = b \cdot x \Rightarrow a = b$ 3) $e \cdot e = e$ 4) $e^{-1} = e$ 5) $(a \cdot b)^{-1} = b^{-1} \cdot a^{-1}$ 6) $a \cdot a = a$
15. Koreni (nule) polinoma $x^2 - x\sqrt{2} + 1$ su: 1) $e^{i\frac{\pi}{4}}$, 2) $e^{-i\frac{\pi}{4}}$, 3) $-e^{i\frac{\pi}{4}}$, 4) $-e^{-i\frac{\pi}{4}}$.
16. NZD za polinome $x^2 - x\sqrt{2} + 1$ i $x^2 - i$ 1) Ne postoji 2) je linearni polinom 3) je konstantni polinom
17. Zaokružiti brojeve ispred jednakosti koje su tačne u skupu kompleksnih brojeva:
1) $\bar{z} \in \mathbb{R} \Rightarrow z = \bar{z}$ 2) $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$ 3) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ 4) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$
5) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ 6) $z\bar{z} = |z|^2$ 7) $z \neq 0 \Rightarrow z^{-1} = |z|^2 \bar{z}$ 8) $|z^{-1}| = 1 \Rightarrow z^{-1} = \bar{z}$

18. Neka je A najveći podskup od $\mathbb{R}$ a B najmanji podskup skupa $\mathbb{R}$ za koje je $f: A \rightarrow B$ definisana sa $f(x) = \arccos(x+1)$. Tada je $A = [-1, 0]$, $f(-\frac{1}{2}) = \frac{3\pi}{4}$, $f(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{4}$ i $B = [0, \pi]$, a $f: A \rightarrow B$ je: 1) bijektivna 2) surjektivna ali ne injektivna 3) injektivna ali ne surjektivna 4) niti injektivna niti surjektivna

19. $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{x, y, z, u\}$, $f_1 = \{(1, x), (2, y)\}$, $f_2 = \{(1, x), (2, y), (3, x)\}$, $f_3 = \{(1, u), (2, y), (3, x)\}$. Svako polje obavezno popuniti sa da ili ne.

$\backslash$	f_i je funkcija	$f_i: A \rightarrow B$	$f_i: \{1, 2\} \rightarrow B$	$f_i: A \xrightarrow{1-1} B$	$f_i: A \xrightarrow{na} B$	$f_i: A \xrightarrow{1-1}_{na} B$
f_1	da	ne	da	ne	ne	ne
f_2	da	da	da	da	ne	ne
f_3	da	da	da	da	ne	ne

20. Funkcija $f: (-\pi; -\frac{\pi}{4}) \rightarrow (-1, \frac{1}{\sqrt{2}})$ definisana sa $f(x) = \cos x$ je:

- 1) surjektivna i nije injektivna 2) injektivna i nije surjektivna 3) nije injektivna i nije surjektivna 4) bijektivna

21. Funkcija $f: (\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}) \rightarrow (0, 1)$ definisana sa $f(x) = \sin x$ je:

- 1) surjektivna i nije injektivna 2) injektivna i nije surjektivna 3) nije injektivna i nije surjektivna 4) bijektivna

22. Funkcija $f: (\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{4}) \setminus \{\frac{\pi}{2}\} \rightarrow \mathbb{R}$ definisana sa $f(x) = \tan x$ je:

- 1) surjektivna i nije injektivna 2) injektivna i nije surjektivna 3) nije injektivna i nije surjektivna 4) bijektivna

23. Napisati primere konačnog prstena bez jedinice $(A, +, \cdot)$ i beskonačnog prstena bez jedinice $(B, +, \cdot)$.

$$A = \{\mathbb{Z}_4 \setminus \{1, 3\}\} \quad B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 1\}$$

24. Ako je p polinom stepena 2 nad proizvoljnim poljem F i ako ima tačno jedan koren u tom polju F , tada je p nad tim poljem F : 1) svodljiv 2) nesvodljiv 3) nekada svodljiv a nekada nesvodljiv 4) ništa od prethodnog

25. Neka je A najveći podskup od $(0, \infty) = \mathbb{R}^+$ a B najmanji podskup skupa $\mathbb{R}$ za koje je funkcija $f: A \rightarrow B$ definisana sa $f(x) = -\sqrt{1-x^2}$. Tada je $A = [0, 1]$, $f(1) = 0$ i $B = [-1, 0]$. Funkcija $f: A \rightarrow B$ je: 1) surjektivna ali ne injektivna 2) injektivna ali ne surjektivna 3) niti injektivna niti surjektivna 4) bijektivna 5) $f^{-1}: O \rightarrow S$, $f^{-1}(x) = \sqrt{1-x^2}$, $O = [-1, 0]$, $S = [0, 1]$

26. Neka je $A = \{1, 2\}$ i $B = \{1, 2, 3\}$. Odrediti broj elemenata sledećih skupova funkcija ako $f \nearrow$ označava rastuću funkciju f i $f \searrow$ označava neopadajuću funkciju f :

$$\begin{aligned} |\{f|f: A \rightarrow B\}| &= 9, |\{f|f: A \xrightarrow{1-1} B\}| = 6, |\{f|f: A \rightarrow B \wedge f \nearrow\}| = 3, |\{f|f: B \xrightarrow{na} B\}| = 6, \\ |\{f|f: B \rightarrow A\}| &= 8, |\{f|f: A \xrightarrow{1-1} A\}| = 2, |\{f|f: B \rightarrow A \wedge f \searrow\}| = 4, |\{f|f: B \xrightarrow{na} A\}| = 0. \end{aligned}$$

27. Neka je A najveći podskup od $\mathbb{R}$ a B najmanji podskup skupa $\mathbb{R}$ za koje je $f: A \rightarrow B$ definisana sa $f(x) = \ln(x^2 + 2)$. Tada je $A = \mathbb{R}$, $f(\pm\sqrt{e-2}) = 1$ i $B = [0, \infty)$. Funkcija $f: A \rightarrow B$ je: 1) bijektivna 2) injektivna ali ne surjektivna 3) surjektivna ali ne injektivna 4) niti injektivna niti surjektivna

28. Neka je $\{-2, 1\}$ skup svih korena polinoma $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ nad poljem realnih brojeva. Tada skup svih mogućnosti za a je $a \in \{0, 3\}$.

29. Zaokružiti grupoide sa neutralnim elementom, koji nisu grupe: 1) $(\mathbb{Z}_7 \setminus \{1, 3, 5\}, \cdot)$ 2) $(\mathbb{Z}_7 \setminus \{1, 3, 5\}, +)$ 3) $(\{f|f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}, \circ)$ 4) $(\mathbb{N} \cup \{0\}, +)$ 5) $(\mathbb{Z}, \cdot)$ 6) $(\{7k|k \in \mathbb{Z}\}, \cdot)$ 7) $(\mathbb{R}[x], \cdot)$

30. Da li postoji polje nad kojim je polinom $t^4 + t^2 + 1$ nesvodljiv? DA NE

31. Ako je p polinom stepena 3 nad poljem $\mathbb{Q}$, tada je p nad poljem $\mathbb{Q}$:

- 1) uvek svodljiv 2) uvek nesvodljiv 3) ništa od prethodnog.

32. $f \in \mathbb{R}[x]$, $f(a+i) = 0$, $a \in \mathbb{R}$. Zaokruži tačno: 1) $x - a + i | f(x)$ 2) $x - a - i | f(x)$ 3) $x - e^{ia} | f(x)$ 4) $x^2 - 2ax + a^2 + 1 | f(x)$ 5) $x^2 + 2ax + a^2 + 1 | f(x)$ 6) $x - e^{-ia} | f(x)$

37. (6) Ako je $A = \{e^{i\psi} + e^{i\varphi} \mid \psi, \varphi \in \mathbb{R}\}$ i $B = \{1 - e^{i\psi} \mid \psi \in \mathbb{R}\}$ tada je (1) $A \cap B \neq \emptyset$, (2) $A \subset B$, (3) $A \subseteq B$, (4) $A \not\subseteq B$, (5) $A \supseteq B$, (6) $A \not\supseteq B$, (7) $A \supset B$, (8) $A \cap B = \emptyset$, (9) $A = B$.
38. (6) Neka je $\{i, -i, 1\}$ skup korena polinoma $x^3 + ax^2 + bx + c$. Tada je $a = -1$ $b = 1$ $c = -1$.

KOLOKVIJUM 1, PRIMER 3

1. (6) U skupu $A = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2, 3\}\}$ je data relacija $\subseteq$. Navesti ako postoje (napisati / ako ne postoji):
 najmanji element: $\{1\}$, minimalne elemente: $\{1\}, \{2\}, \{3\}$,
 najveći element: $\{1, 2, 3\}$, maksimalne elemente: $\{1, 2, 3\}$.
2. (6) Neka su $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ i $g: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ definisane sa $f(x) = \sqrt{x}$ i $g(x) = \ln x$. Izračunati (napisati / ako ne postoji): 1) $f^{-1}(x) = x^2, x \in \mathbb{R}^+$ 2) $g^{-1}(x) = e^x, x \in \mathbb{R}$ 3) $(f \circ g)(x) = \sqrt{\ln x}, x \in (1, \infty)$ 4) $(g \circ f)(x) = \ln \sqrt{x}, x \in \mathbb{R}^+$
3. (6) Napisati SDNF Bulovog izraza $(x'y + xy + xy')'$: $x'y$
4. (6) Zaokružiti broj (ili brojeve) ispred struktura koja su grupoidi:
 (1) $(\mathbb{Z}, +)$ (2) $(\{-1, 0, 1\}, +)$ (3) $(\mathbb{N} \cup \{0\}, +)$ (4) $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, +)$ (5) $(\{-1, 1\}, \cdot)$ (6) $(\{1\}, \cdot)$
5. (6) Za kompleksne brojeve $z_1 = 1 + i$ i $z_2 = -2i$ izračunati
 $z_1 + z_2 = 1 - i$ $z_1 \cdot z_2 = 2 - 2i$ $\frac{z_1}{z_2} = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2}$ $\arg(z_2) = -\frac{\pi}{2}$ $|z_2| = 2$
6. (6) Koreni (nule) polinoma $x^2 + i$ su: 1) $e^{i\frac{\pi}{4}}$, 2) $e^{-i\frac{\pi}{4}}$, 3) $-e^{i\frac{\pi}{4}}$, 4) $-e^{-i\frac{\pi}{4}}$.
7. (6) Odrediti realni i imaginarni deo, moduo, argument, i konjugovani broj kompleksnog broja $z = -i\sqrt{3}$:
 $\operatorname{Re}(z) = 0$, $\operatorname{Im}(z) = -\sqrt{3}$, $|z| = \sqrt{3}$, $\arg(z) = -\frac{\pi}{2}$, $\bar{z} = i\sqrt{3}$.
8. (6) Pri deljenju polinoma $x^4 - 1$ sa $x^2 + x + 1$ nad $\mathbb{R}$, količnik je $x^2 - x$, a ostatak je $x - 1$.
9. (6) Zaokružiti broj (ili brojeve) ispred struktura koja su grupe:
 (1) $(\mathbb{Z}, \cdot)$ (2) $(\mathbb{Z}, +)$ (3) $(\{-1, 1\}, \cdot)$ (4) $(\mathbb{Z}_4, +)$ (5) $(\mathbb{N} \cup \{0\}, +)$ (6) $((0, \infty), \cdot)$
10. (6) Koje od navedenih struktura su polja:
 (1) $(\mathbb{Z}_7, +, \cdot)$ (2) $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ (3) $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ (4) $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ (5) $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ (6) $(\mathbb{Z}_4, +, \cdot)$
- *****
11. (6) Zaokružiti broj (ili brojeve) ispred jednakosti koje su tačne u skupu kompleksnih brojeva: (1) $z\bar{z} = |z|^2$
 (2) $\operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$ (3) $\operatorname{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$ (4) $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$ (5) $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$
 (6) $\bar{z} \in \mathbb{R} \Rightarrow z = \bar{z}$ (7) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$ (8) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ (9) $z \neq 0 \Rightarrow z^{-1} = |z|^{-2} \bar{z}$
 (10) $|z| = 1 \Rightarrow z^{-1} = \bar{z}$
12. (6) Izračunati: 1) $\arg(-13i) = -\frac{\pi}{2}$ 2) $\arg(6) = 0$ 3) $\arg(-9) = \pi$ 4) $\arg(2i) = \frac{\pi}{2}$
 5) $\arg(-1 + i) = \frac{3\pi}{4}$ 6) $\arg(-1 + i\sqrt{3}) = \frac{2\pi}{3}$ 7) $\arg(0) = \text{---}$
13. (6) Napisati Kejljeve tablice grupoida $(\mathbb{Z}_3, +)$ i $(\mathbb{Z}_3, \cdot)$, odrediti inverzne elemente i izračunati:
- | + | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 2 |
| 1 | 1 | 2 | 0 |
| 2 | 2 | 0 | 1 |
- | · | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 2 |
| 2 | 0 | 2 | 1 |
- $-0 = 0$, $-1 = 2$, $-2 = 1$ $1^{-1} = 1$, $2^{-1} = 2$,
 $(2 + 2^3)^{-1} = 1$ $((-1)^{-1} + 2^3)^{-1} = 1$, $(2 + 2^3)^2 = 1$.
14. (6) Da li je $\rho = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (4, 1), (3, 1)\}$ relacija poretka skupa $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$: DA NE, i ako jeste, nacrtati njen Hasov dijagram. Odrediti
 minimalne: 5 , maksimalne: $1, 2$,
 najveći: --- i najmanji: 5 element.
15. (6) Neka je $z = 3 + 2i$, $u = 1 + i$ i $w = 2 - i$. Rotacijom tačke z oko tačke u za ugao $\frac{\pi}{2}$ dobija se tačka $3 - i$, translacijom tačke z za vektor w dobija se tačka $5 + i$, a $\angle wuz = \frac{\pi}{2}$.

16. ● Zaokružiti brojeve (ili broj) ispred struktura koje su prsteni ali nisu polja: 1 $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$
2 $(\mathbb{Z}_4, +, \cdot)$ ~~3~~ $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ ~~4~~ $(\mathbb{Z}_3, +, \cdot)$ ~~5~~ $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ ~~6~~ $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ 7 $(\mathbb{R}[t], +, \cdot)$ ~~8~~ $(\mathbb{R}^+, +, \cdot)$
17. ● U polju $\mathbb{Z}_5$ izračunati $3(2^3 + 4) + 3 = \underline{4}$ $2^{-1} = \underline{3}$ $3^{-1} = \underline{2}$ $-2 = \underline{3}$ $-3 = \underline{2}$
18. ● U skupu $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ date su relacije: $\rho_1 = \{(x, 3x) | x \in \mathbb{N}\}$, $\rho_2 = \{(x, y) | x + y = 0, x, y \in \mathbb{N}\}$,
 $\rho_3 = \{(x, x) | x \in \mathbb{N}\}$, $\rho_4 = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{N}, xy < 4\}$, $\rho_5 = \{(2x, 2x) | x \in \mathbb{N}\}$, $\rho_6 = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.
Iza oznake svake od tih relacija zaokružiti samo ona slova koja označavaju svojstvo relacije koju ona
posедује: R- refleksivnost, S- simetričnost, A- antisimetričnost, T- tranzitivnost.
 ρ_1 : R S A T ρ_2 : R S A T ρ_3 : R S A T ρ_4 : R S A T ρ_5 : R S A T ρ_6 : R S A T
19. ● Neka je $A = \{1, 2, 3, 4\}$ i $B = \{1, 2\}$. Odrediti broj elemenata sledećih skupova funkcija ako $f \nearrow$ označava
rastuću funkciju f i $f \searrow$ označava neopadajuću funkciju f :
 $|\{f | f: A \rightarrow B\}| = \underline{16}$, $|\{f | f: A \xrightarrow{1-1} B\}| = \underline{0}$, $|\{f | f: A \rightarrow B \wedge f \nearrow\}| = \underline{0}$, $|\{f | f: B \xrightarrow{na} A\}| = \underline{1}$,
 $|\{f | f: B \rightarrow A\}| = \underline{16}$, $|\{f | f: A \xrightarrow{1-1} A\}| = \underline{14}$, $|\{f | f: B \rightarrow A \wedge f \searrow\}| = \underline{10}$, $|\{f | f: A \xrightarrow{na} B\}| = \underline{14}$.
20. ● Neka je A najveći podskup od $\mathbb{R}$ a B najmanji podskup skupa $\mathbb{R}$ za koje je $f: A \rightarrow B$ definisana sa
 $f(x) = \ln(x^2 + e^{-1})$. Tada je $A = \underline{\mathbb{R}}$, $f(\underline{0}) = \underline{-1}$ i $B = \underline{[-1, \infty)}$.
Funkcija $f: A \rightarrow B$ je: 1) bijektivna 2) surjektivna ali ne injektivna
3) injektivna ali ne surjektivna 4) niti injektivna niti surjektivna
21. ● Zaokružiti broj (ili brojeve) ispred tvrdjenja koje je tačno u Bulovoj algebri $B = (B, +, \cdot, ', 0, 1)$.
1 $xx = x + x$ 2 $xy = x + y$ 3 $xx' = (x+1)'$ 4 $xy = 1 \Rightarrow x = 1$ 5 $xy = 0 \Rightarrow (x = 0 \vee y = 0)$
6 $(x = 0 \vee y = 0) \Rightarrow xy = 0$ 7 $x = xy + xy'$ 8 $(\forall x \in B)(\exists y \in B) x + y = 1 \wedge xy = 0$
22. ● Zaokružiti asocijativno komutativne grupoidne sa neutralnim elementom, koji nisu grupe: 1 $(\mathbb{R}[x], \cdot)$
~~2~~ $(\{z \in \mathbb{C} | \operatorname{Im}(z) = \operatorname{Re}(z)\}, +)$ ~~3~~ $(\{f | f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}, \circ)$ 4 $(\mathbb{N} \cup \{0\}, +)$ 5 $(\mathbb{Z}, \cdot)$ 6 $(\{7k | k \in \mathbb{Z}\}, \cdot)$
23. ● Zaokružiti podgrupe grupe $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$: 1 $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, +)$ 2 $((0, \infty), \cdot)$ 3 $((-\infty, 0), \cdot)$ 4 $(\mathbb{N}, \cdot)$
5 $(\mathbb{Z} \setminus \{0\}, \cdot)$ 6 $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, +)$ 7 $((0, 1), \cdot)$ 8 $(\{-1, 1\}, \cdot)$ 9 $(\{-1, 0, 1\}, \cdot)$ 10 $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$
24. ● Zaokružiti broj (ili brojeve) ispred struktura koje su prsteni. 1 $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ 2 $(\mathbb{Z}_4, +, \cdot)$ 3 $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, +, \cdot)$
4 $((0, \infty), +, \cdot)$ 5 $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ 6 $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ 7 $(\mathbb{R}[t], +, \cdot)$ 8 $(\{-1, 1\}, +, \cdot)$ 9 $(\{7k | k \in \mathbb{Z}\}, +, \cdot)$
25. ● Zaokružiti oznaku polja za koje važi da je polinom $t^2 + 2t + 1$ svodljiv nad njima. Q R C Z₂ Z₃ Z₄
26. ● Ako je p polinom stepena 2 nad poljem $\mathbb{R}$, tada je p nad poljem $\mathbb{R}$:
1) uvek svodljiv 2) uvek nesvodljiv 3) ništa od prethodnog.
27. ● Neka je $\{1, -1\}$ skup svih korena polinoma $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ nad poljem realnih brojeva. Tada
skup svih mogućnosti za c je $c \in \{ \underline{1}, \underline{-1} \}$.
28. ● Navesti geometrijsku interpretaciju skupova A, B, C, D i sledećih kompleksnih funkcija $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $g: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $h: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ i $t: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, kao i odgovoriti na pitanje injektivnosti i surjektivnosti funkcija f, g, h i t .
 $f(z) = \bar{z}e^{i2\arg(z)}$ je identička funkcija bijekcija
 $g(z) = -zi$ je rotacija za $-\frac{\pi}{2}$ bijekcija
 $h(z) = z + i$ je translacija za i bijekcija
 $t(z) = -\bar{z}$ je simetrija u odnosu na D_n -osu bijekcija
 $A = \{z | (z - i)^3 = i\}$ je temena jednakostraničnog trougla sa centrom i
 $B = \{z | |z|^{2010} = 1\}$ je kružnica sa centrom u koordinatnom početku i poluprečnika 1
 $C = \{z | |z - i|^3 = i\}$ je prazan skup
 $D = \{z | z = -\bar{z}\}$ je cela D_n -osa

- 2) Za koje vrednosti realnih parametara a, b i c formula $f(x) = a^2 e^{bx} + c^2$
- 1) definiše funkciju $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ $\frac{a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \wedge b, c \in \mathbb{R} \vee (a=0 \wedge b \in \mathbb{R} \wedge c \in \mathbb{R} \setminus \{0\})}{}$
 - 2) definiše injektivnu funkciju $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ $\frac{a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \wedge b \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \wedge c \in \mathbb{R}}{}$
 - 3) definiše surjektivnu funkciju $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ $\frac{a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \wedge b \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \wedge c=0}{}$
 - 4) definiše bijektivnu funkciju $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ $\frac{a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \wedge b \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \wedge c=0}{}$
 - 5) definiše rastuću funkciju $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ $\frac{a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \wedge b \in \mathbb{R}^+ \wedge c \in \mathbb{R}}{}$
 - 6) definiše neopadajuću funkciju $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ $\frac{a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \wedge b \in \mathbb{R}^+ \vee (a=0 \wedge b \in \mathbb{R} \wedge c \in \mathbb{R} \setminus \{0\})}{}$

- 3) U Bulovoj algebri $B = (B, +, \cdot, ', 0, 1)$ važi:
- 1) $x + y = (x'y)'$
 - 2) $xy = (x' + y')'$
 - 3) $xy = 1 \Rightarrow x = 1$
 - 4) $x = y \Rightarrow x' = y'$
 - 5) $x' = y' \Rightarrow x = y$
 - 6) $f(x) = x' \Rightarrow f: B \xrightarrow{1-1} B$

KOLOKVIJUM 1, PRIMER 4

- 1) Iza oznake svake od datih relacija u skupu prirodnih brojeva $\mathbb{N}$ zaokružiti samo ona slova koja označavaju svojstvo relacije koju ona poseduje: R- refleksivnost S- simetričnost A- antisimetričnost T- tranzitivnost F- funkcija.

(relacija „deli“): RSATF $\rho = \{(1, 1), (3, 2), (2, 1)\} : \text{RSATF}$ $\rho = \{(1, 3), (1, 2), (2, 1)\} : \text{RSATF}$

- 2) Neka su $f: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ i $g: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ definisane sa $f(x) = \frac{1}{2x}$ i $g(x) = e^x - 1$. Izračunati:

1) $f^{-1}(x) = \frac{1}{2x}$ 2) $g^{-1}(x) = \ln(x+1)$ 3) $(f \circ g)(x) = \frac{1}{2(e^x - 1)}$ 4) $(f \circ g)^{-1}(x) = \ln(\frac{1}{2x} + 1)$ 5) $(g^{-1} \circ f^{-1})(x) = \ln(\frac{1}{2x} + 1)$

- 3) Zaokružiti brojeve ispred bijektivnih funkcija:

1) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -x^3$ 2) $f: \mathbb{R} \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), f(x) = \arctg x$ 3) $f: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty), f(x) = x^2$
 4) $f: [-3, -1) \rightarrow [9, 1), f(x) = x^2$ 5) $f: (0, \frac{\pi}{2}) \rightarrow (0, \infty), f(x) = \tg x$

- 4) Zaokružiti brojeve ispred tvrdjenja koja su tačna u svakoj Bulovoj algebri $(B, +, \cdot, ', 0, 1)$:

1) $(a')' = a + 1'$ 2) $aa' = 1$ 3) $a \cdot 0 = 1'$ 4) $1 + a = a$ 5) $(ab)' = a'b'$

- 5) Skup kompleksnih rešenja jednačine $x^2 = -9$ je $S = \{ 3i, -3i \}$.

- 6) Odrediti realni i imaginarni deo, moduo, argument, i konjugovani broj kompleksnog broja $z = \pi e^{i\frac{7\pi}{3}}$:

$Re(z) = \frac{\pi}{2}$, $Im(z) = \frac{\sqrt{3}\pi}{2}$, $|z| = \pi$, $\arg(z) = \frac{7\pi}{3}$, $\bar{z} = \pi e^{-i\frac{7\pi}{3}}$, $z^3 = \pi^3 e^{i7\pi}$

- 7) Sledeće kompleksne brojeve napisati u algebarskom obliku:

$e^{i\pi} = -1$, $2e^{i\frac{\pi}{2}} = 2i$, $\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} = 1+i$, $2e^{0i} = 2$, $2e^{i2k\pi} = 2$

- 8) Zaokružiti broj (ili brojeve) ispred struktura koje su grupoidi a nisu grupe.

1) $(\mathbb{N}, +)$ 2) $(\mathbb{N}, \cdot)$ 3) $(\{-1, 0, 1\}, \cdot)$ 4) $(\mathbb{R}, +)$ 5) $(\mathbb{R}, \cdot)$ 6) $((0, \infty), +)$ 7) $((0, \infty), \cdot)$

- 9) Neka su $P = (a_0, a_1, \dots, a_4)$ i $Q = (b_0, b_1, \dots, b_3)$ polinomi. Tada je $dg(P+Q) = 4$ i $dg(PQ) = 7$

- 10) Pri deljenju polinoma $x^4 + x^2 + 1$ sa $x^2 - x + 1$ nad $\mathbb{R}$, količnik je $x^2 + x$, a ostatak je $x + 1$.

- 11) Zaokružiti broj (ili brojeve) ispred tvrdjenja koje je tačno u Bulovoj algebri:

1) $a \cdot ab = a \cdot 0'$ 2) $a + 1 = 0'$ 3) $a \cdot b = (ab)'$ 4) $a \cdot b = (a' + b')'$ 5) $a \cdot 0 = 1'$ 6) $(a + ab)' = a'$
 7) $a + ab = a$ 8) $1 + 0 = 0'$

- 12) Broj svih antisimetričnih relacija skupa $A = \{1, 2\}$ je: 12 prebroj prvo one koje nisu!

- 13) U skupu $\mathbb{C}$ date su relacije: $\rho_1 = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid |z| = |w|\}$, $\rho_2 = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid z \cdot w = 0\}$,
 $\rho_3 = \{(0, 0)\} \cup \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid \arg(z) = \arg(w)\}$, $\rho_4 = \{(0, 0)\} \cup \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid z \cdot w = 1\}$,
 $\rho_5 = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid Re(z) = Im(w)\}$, $\rho_6 = \mathbb{C}^2$

Iza oznake svake od tih relacija zaokružiti samo ona slova koja označavaju svojstvo relacije koju ona poseduje: R- refleksivnost S- simetričnost A- antisimetričnost T- tranzitivnost F- funkcija.

$\rho_1: \text{RSATF}$ $\rho_2: \text{RSATF}$ $\rho_3: \text{RSATF}$ $\rho_4: \text{RSATF}$
 $\rho_5: \text{RSATF}$ $\rho_6: \text{RSATF}$

14. Ako je $f: A \rightarrow B$ surjektivna funkcija i $b \in B$, tada broj rešenja po $x \in A$ jednačine $f(x) = b$ može biti (zaokruži) 0 1 2 3 ∞
15. Ako je $f: A \rightarrow B$ injektivna funkcija i $b \in B$, tada broj rešenja po $x \in A$ jednačine $f(x) = b$ može biti (zaokruži) 0 1 2 3 ∞
16. Naći najveći podskup A skupa $\mathbb{R}$ i zatim najmanji podskup B skupa $\mathbb{R}$ tako da je izrazom $f(x) = \arccos x$ dobro definisana funkcija $f: A \rightarrow B$. Tada je $A = [-1, 1]$ i $B = [0, \pi]$. Funkcija $f: A \rightarrow B$ je: 1 surjektivna i injektivna 2) ni surjektivna ni injektivna 3) surjektivna ali nije injektivna 4) nije surjektivna a jeste injektivna
17. Neka je $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ i $B = \{6, 7\}$. Odrediti broj elemenata sledećih skupova funkcija:
 $|\{f|f: A \rightarrow B\}| = 32$ $|\{f|f: A \xrightarrow{1-1} B\}| = 0$ $|\{f|f: A \xrightarrow{na} B\}| = 30$ $|\{f|f: A \xrightarrow{\frac{1-1}{na}} B\}| = 0$
 $|\{f|f: B \rightarrow A\}| = 25$ $|\{f|f: B \xrightarrow{1-1} A\}| = 20$ $|\{f|f: B \xrightarrow{na} A\}| = 0$ $|\{f|f: B \xrightarrow{\frac{1-1}{na}} A\}| = 1$
18. Zaokružiti brojeve ispred struktura koje su asocijativni grupoidi sa neutralnim elementom:
 1) $(\{2k|k \in \mathbb{Z}\}, \cdot)$ 2 $(P(\mathbb{N}), \cap)$ 3 $(\{a + ai|a \in \mathbb{R}\}, +)$ 4 $(\mathbb{Z}, \cdot)$ 5 $(\{f|f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}\}, \circ)$
19. Zaokružiti brojeve ispred struktura koje su prsteni a nisu polja: 1 $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ 2 $(\mathbb{Z}_4, +, \cdot)$
 3) $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ 4) $(\mathbb{Z}_3, +, \cdot)$ 5) $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ 6) $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ 7 $(\mathbb{R}[t], +, \cdot)$ 8) $(\mathbb{R}^+, +, \cdot)$
20. Skup svih stepena nesvodljivih polinoma nad poljem $\mathbb{R}$ je $\{1, 2\}$, a nad poljem $\mathbb{C}$ je $\{1\}$.
21. Navesti geometrijsku interpretaciju skupova A, B, C, D i sledećih kompleksnih funkcija $f, g: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, kao i odgovoriti na pitanje injektivnosti i surjektivnosti funkcija f i g .
 $f(z) = z \cdot (-i)$ je rotacija za $-\frac{\pi}{2}$ bijectivna
 $f(z) = \bar{z}e^{i2\arg(z)}$ je identična funkcija bijectivna
 $g(z) = -\bar{z}$ je simetrija u odnosu na Im-osu bijectivna
 $A = \{z|z^2 = \bar{z}\} = \{0, 1, e^{i\frac{\pi}{2}}, e^{i\frac{3\pi}{2}}\}$ temena jednakostraničnog trougla sa centrom u 0
 $B = \{z|z = |\bar{z}|\}$ je cela kompleksna ravan
 $C = \{z|\frac{z+\bar{z}}{2} = \frac{z-\bar{z}}{2i}\}$ je prava $y=x$
 $D = \{z|z \leq 2 \wedge 0 \leq \arg z \leq \pi\}$ je gornji polukrug od $\mathbb{R}(0,2)$ bez 0
 $E = \{z|(z-i)^3 = i\}$ je temena jednakostraničnog trougla sa centrom u i
 $F = \{z|z^{2010} = 1\}$ je $\mathbb{U}(0,1)$
 $G = \{z|z-i|^3 = i\}$ je prava $y=x$
 $H = \{z|z = -\bar{z}\}$ je cela Im-os
22. Zaokružiti broj (ili brojeve) ispred jednakosti koje su tačne u skupu kompleksnih brojeva: 1 $z\bar{z} = |z|^2$
2 $\operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + |z|)$ 3) $\operatorname{Im}(z) = \frac{1}{2}(z + |z|)$ 4 $z_1 + z_2 = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$ 5) $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$
6 $\bar{z} \in \mathbb{R} \Rightarrow z = \bar{z}$ 7 $\bar{z_1} \cdot \bar{z_2} = \overline{z_1 \cdot z_2}$ 8) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ 9 $z \neq 0 \Rightarrow z^{-1} = |z|^{-2}\bar{z}$
10 $|z| = 1 \Rightarrow z^{-1} = \bar{z}$
23. 1) $\arg(-13i) = -\frac{3\pi}{2}$ 2) $\arg(6) = 0$ 3) $\arg(-9) = \pi$
 4) $\arg(2i) = \frac{\pi}{2}$ 5) $\arg(-1+i) = \frac{3\pi}{4}$ 6) $\arg(-1+i\sqrt{3}) = \frac{2\pi}{3}$
24. Da li je $\rho = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (4,1), (3,1)\}$ relacija poretka skupa $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$: DA NE, i ako jeste, nacrtati njen Haseov dijagram. Odrediti minimalne: 5, maksimalne: 1, 2, najveći: / i najmanji: 5 element.
25. Neka je $z = 3 + 2i$, $u = 1 + i$ i $w = 2 - i$. Rotacijom tačke z oko tačke u za ugao $\frac{\pi}{2}$ dobija se tačka $2i$, translacijom tačke z za vektor w dobija se tačka $5+i$, a $\angle wuz = \frac{\pi}{4}$
26. Ako je p polinom stepena 4 nad nekim poljem F i ako ima koren u tom polju, tada je p : 1 uvek svodljiv 2) uvek nesvodljiv 3) nekada svodljiv a nekada nesvodljiv 4) ništa od prethodnog 5) uvek normalizovan

23. Zaokružiti broj (ili brojeve) ispred struktura koje su prsteni. ① $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ② $(\mathbb{Z}_4, +, \cdot)$ ③ $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, +, \cdot)$
 4) $((0, \infty), +, \cdot)$ 5) $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ 6) $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ 7) $(\mathbb{R}[t], +, \cdot)$ 8) $(\{-1, 1\}, +, \cdot)$ 9) $(\{7k | k \in \mathbb{Z}\}, +, \cdot)$
24. Zaokružiti oznaku polja za koje važi da je polinom $t^2 + t + 1$ nesvodljiv nad njima. $\mathbb{Q}$ $\mathbb{R}$ $\mathbb{C}$ $\mathbb{Z}_2$ $\mathbb{Z}_3$ $\mathbb{Z}_5$
29. Ako je p polinom stepena 2 nad poljem $\mathbb{R}$, tada je p nad poljem $\mathbb{R}$:
 1) uvek svodljiv 2) uvek nesvodljiv 3) ništa od prethodnog.
30. Neka je $f \in \mathbb{R}[x]$ i $f(e^{-i\frac{\pi}{6}}) = 0$. Zaokruži tačno: a) $x - e^{-i\frac{\pi}{6}} \mid f(x)$ b) $x + e^{i\frac{\pi}{6}} \mid f(x)$ c) $x - e^{i\frac{\pi}{6}} \mid f(x)$
 d) $x^2 - x\sqrt{3} + 1 \mid f(x)$; e) $x^2 - 2x\sqrt{3} + 1 \mid f(x)$; f) $x^2 + x\sqrt{3} + 1 \mid f(x)$; g) $x^2 - x + 1 \mid f(x)$
31. Zaokruži tačno: 1) $-\frac{\pi}{2} \leq \arg z \leq \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \operatorname{Re}(z) \geq 0$ 2) $-\frac{\pi}{2} \leq \arg z \leq \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow (\operatorname{Re}(z) \geq 0 \wedge z \neq 0)$
 3) $-\frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \operatorname{Re}(z) > 0$ 4) $\arg z < 0 \Rightarrow \operatorname{Im}(z) \leq 0$ 5) $\arg z < 0 \Leftrightarrow \operatorname{Im}(z) \leq 0$
32. Neka je $\{2, 3\}$ skup svih korena polinoma $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ nad poljem realnih brojeva. Tada skup svih mogućnosti za a je $a \in \{ \quad -8, -7 \quad \}$.

KOLOKVIJUM 1, PRIMER 5

1. Iza oznake svake od datih relacija u skupu $\{1, 2, 3\}$ zaokružiti samo ona slova koja označavaju svojstvo relacije koju ona poseduje: R- refleksivnost S- simetričnost A- antisimetričnost T- tranzitivnost F- funkcija.
 (relacija „deli“): $\mathbb{R} \text{ S } \mathbb{A} \text{ T } \mathbb{F}$ $\rho = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (2, 1)\}$: $\mathbb{R} \text{ S } \mathbb{A} \text{ T } \mathbb{F}$
 $\rho = \{(1, 3), (1, 2), (2, 1)\}$: $\mathbb{R} \text{ S } \mathbb{A} \text{ T } \mathbb{F}$
2. Neka su $f: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ i $g: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ definisane sa $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ i $g(x) = 2^x - 1$. Izračunati:
 1) $f^{-1}(x) = \frac{1}{x^2}$ 2) $g^{-1}(x) = \log_2(x+1)$ 3) $(f \circ g)(x) = \frac{1}{\sqrt{2^x - 1}}$ 4) $(f \circ g)^{-1}(x) = \log_2(\frac{1}{x^2} + 1)$ 5) $(g^{-1} \circ f^{-1})(x) = \log_2(\frac{1}{x^2} + 1)$
3. Zaokružiti brojeve ispred surjektivnih funkcija: ① $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -x^3$
 ② $f: \mathbb{R} \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), f(x) = \arctg x$ ③ $f: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty), f(x) = x^2$ ④ $f: [-3, 3] \rightarrow [0, 9], f(x) = x^2$
 ⑤ $f: (0, \frac{\pi}{3}) \rightarrow (0, \sqrt{3}], f(x) = \tg x$
4. Zaokružiti brojeve ispred tvrdjenja koja su tačna u svakoj Bulovoj algebri $(B, +, \cdot, ', 0, 1)$:
 1) $(a')' = a + 0'$ 2) $a + a' = 1$ 3) $a \cdot 0 = 1'$ 4) $1 + a = 0'$ 5) $a + b = (a'b')'$
5. Skup kompleksnih rešenja jednačine $x^3 = -1$ je $S = \{ e^{i\frac{2\pi}{3}}, -1, e^{-i\frac{2\pi}{3}} \}$.
6. Odrediti realni i imaginarni deo, moduo, argument, i konjugovani broj kompleksnog broja $z = \frac{\pi}{6} e^{i\frac{13\pi}{6}}$:
 $\operatorname{Re}(z) = \frac{\sqrt{3}}{12}$, $\operatorname{Im}(z) = \frac{\pi}{12}$, $|z| = \frac{\pi}{6}$, $\arg(z) = \frac{\pi}{6}$, $\bar{z} = \frac{\pi}{6} e^{-i\frac{13\pi}{6}}$, $z^3 = \frac{\pi^3}{216} e^{i\frac{13\pi}{2}}$
7. Sledeće kompleksne brojeve napisati u eksponencijalnom obliku, odnosno u obliku $\rho e^{i\varphi}$, $\rho \in [0, \infty)$, $\varphi \in (-\pi, \pi]$:
 $-1 = e^{i\pi}$, $2i = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$, $1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$, $2 = 2e^{i0}$, $-\pi i = \pi e^{-i\frac{\pi}{2}}$
8. Zaokružiti broj (ili brojeve) ispred struktura koje su grupe.
 1) $(\mathbb{N}, +)$ 2) $(\mathbb{N}, \cdot)$ 3) $(\{-1, 0, 1\}, \cdot)$ 4) $(\mathbb{R}, +)$ 5) $(\mathbb{R}, \cdot)$ 6) $((0, \infty), +)$ 7) $(\{-1, 1\}, \cdot)$ 8) $((0, \infty), \cdot)$
9. Neka su P i Q proizvoljni nenula polinomi trećeg stepena. Tada je $dg(P+Q) \in \{0, 1, 2, 3\}$ i $dg(PQ) \in \{6\}$.
10. Pri deljenju polinoma $x^3 + x^2 + x + 1$ sa $x + 1$ nad $\mathbb{R}$, količnik je $x^2 + 1$, a ostatak je 0 .
11. Neka su f i g funkcije definisane sa $f = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ c & d & a & b \end{pmatrix}$, $g = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & d & c & a \end{pmatrix}$. Tada je $f \circ g = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a & b & c & d \end{pmatrix}$,
 $f^{-1} = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ c & d & a & b \end{pmatrix}$, $g^{-1} = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & d & c & a \end{pmatrix}$, $(f \circ g)^{-1} = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ c & d & a & b \end{pmatrix}$, $g^{-1} \circ f^{-1} = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ c & d & a & b \end{pmatrix}$.
12. Zajednički koren polinoma $P(x) = x^2 - \sqrt{2}x + 1$ i $Q(x) = x^2 - i$ je $e^{i\frac{\pi}{4}}$, a $NZD(P, Q) = \left(x - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right)$

13. Zaokružiti broj (ili brojeve) ispred tvrđenja koja su tačna u svakom prstenu $(F, +, \cdot)$:

- 1) $a + bc = (a + b)(a + c)$ 2) $(F, +)$ je grupa 3) $(F, \cdot)$ je grupa
 4) operacija $+$ je distributivna prema $\cdot$ 5) $ab = 0 \Rightarrow a = 0 \vee b = 0$ 6) $a \neq 0 \wedge b \neq 0 \Rightarrow ab \neq 0$
 7) $a \cdot 0 = 0$ 8) $a \cdot (-a) = -a^2$ 9) $a + (-a) = 0$

14. Neka je $g : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = -\sqrt{1-x^2}$, inverzna funkcija je

$$g^{-1}(x) = \sqrt{1-x^2}, g^{-1} : A \rightarrow \mathbb{R}, A = (-1, 0]$$

15. Neka je funkcija $f : \mathbb{R} \setminus \{2\} \rightarrow \mathbb{R}$ definisana sa $f(x) = \frac{x}{x-2}$. Tada je $f^{-1}(x) = \frac{2x}{x-1}$

16. Zaokruži brojeve ispred tačnih iskaza. 1) $\arg z > 0 \Leftrightarrow I_m(z) > 0$ 2) $\arg z < 0 \Leftrightarrow I_m(z) < 0$
 3) $\arg z < 0 \Rightarrow I_m(z) \leq 0$ 4) $-\frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{\pi}{2} \Rightarrow R_e(z) > 0$ 5) $\arg z < 0 \Leftarrow I_m(z) \leq 0$

17. Neka je A najveći podskup od $\mathbb{R}$ a B najmanji podskup skupa $\mathbb{R}$ za koje je $f : A \rightarrow B$ definisana sa $f(x) = \ln(x^2 + e)$. Tada je $A = \mathbb{R}$, $f(0) = 1$, $f(\frac{1}{e}) = 0$ i $B = [1, \infty)$, a $f : A \rightarrow B$ je:
 a) bijektivna b) surjektivna ali ne injektivna g) injektivna ali ne surjektivna d) niti injektivna niti surjektivna

18. Koje od navedenih struktura su polja: 1) $(\mathbb{R}, \cdot, +)$ 2) $(\{f_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f_k(x) = kx, k \in \mathbb{R}\}, +, \cdot)$
 3) $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot, +)$ 4) $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ 5) $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ 6) $(\mathbb{C}, \cdot, +)$ 7) $(\mathbb{C}, +, \cdot)$

19. Neka je $z = 3 + 2i$, $u = 1 + i$ i $w = 2 - i$. Rotacijom tačke z oko tačke u za ugao $\frac{\pi}{2}$ dobija se tačka $3i$, translacijom tačke z za vektor w dobija se tačka $5+i$, a $\angle wuz = \frac{\pi}{2}$

20. Neka je A najveći podskup od $\mathbb{R}$ a B najmanji podskup skupa $\mathbb{R}$ za koje je $f : A \rightarrow B$ definisana sa $f(x) = \arccos(x+1)$. Tada je $A = [-2, 0]$, $f(-2) = \frac{3\pi}{4}$, $f(-1) = \frac{\pi}{4}$ i $B = [0, \frac{\pi}{4}]$, a $f : A \rightarrow B$ je: 1) bijektivna 2) surjektivna ali ne injektivna 3) injektivna ali ne surjektivna 4) niti injektivna niti surjektivna

21. Funkcija $f : (-\pi, -\frac{\pi}{4}) \rightarrow (-1, \frac{1}{\sqrt{2}})$ definisana sa $f(x) = \cos x$ je: 1) surjektivna i nije injektivna
 2) injektivna i nije surjektivna 3) nije injektivna i nije surjektivna 4) bijektivna

22. Funkcija $f : (\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}) \rightarrow (0, 1]$ definisana sa $f(x) = \sin x$ je: 1) surjektivna i nije injektivna
 2) injektivna i nije surjektivna 3) nije injektivna i nije surjektivna 4) bijektivna

23. Funkcija $f : (\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{4}) \setminus \{\frac{\pi}{2}\} \rightarrow \mathbb{R}$ definisana sa $f(x) = \tan x$ je: 1) surjektivna i nije injektivna
 2) injektivna i nije surjektivna 3) nije injektivna i nije surjektivna 4) bijektivna

24. Navesti geometrijsku interpretaciju skupova A, B, C, D, E i sledećih kompleksnih funkcija $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $h : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ i $s : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, kao i odgovoriti na pitanje injektivnosti i surjektivnosti funkcija f i g .

$f(z) = \bar{z}e^{i\pi}$ je odraz u odnosu na imaginarnu osu bijektivna

$g(z) = -z$ je centralna simetrija bijektivna

$h(z) = R_e(z)$ je projekcija na realnu osu nije bijektivna

$s(z) = z \cdot \frac{1-i}{\sqrt{2}}$ je rotacija za $\frac{\pi}{4}$ bijektivna

$A = \{z \mid z^{11} = i\}$ je deset pravilnog mnogougla sa centrom u 0

$B = \{z \mid |z^{11}| = |i|\}$ je $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

$C = \{z \mid z = -\bar{z}\}$ je cela imaginarna osa

$D = \{z \mid \arg z = \arg(-z)\}$ je prazan skup

$E = \{z \mid I_m(z) = -R_e(z)\}$ je prava $y = -x$

Zaokružiti slova ispred tačnih iskaza: a) $A \subset B$ b) $C \subseteq D$ c) $D \subseteq C$ d) $B \subseteq D$ e) $D \subseteq E$

25. Neka je $\{1, 0\}$ skup svih korena polinoma $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, gde su $a, b, c \in \mathbb{R}$. Tada skup svih mogućnosti za a je $a \in \{-2, -1\}$, skup svih mogućnosti za b je $b \in \{0, 1\}$ i skup svih mogućnosti za c je $c \in \{0\}$.

27. Neka je $A = \{1, 2, 3\}$ i $B = \{1, 2\}$. Odrediti broj elemenata sledećih skupova funkcija ako $f \nearrow$ označava rastuću funkciju f i $f \searrow$ označava neopadajuću funkciju f :

$$\begin{aligned} |\{f|f: A \rightarrow B\}| &= 9, |\{f|f: A \xrightarrow{1-1} B\}| = 0, |\{f|f: A \rightarrow B \wedge f \nearrow\}| = 0, |\{f|f: B \xrightarrow{na} B\}| = 2 \\ |\{f|f: B \rightarrow A\}| &= 2, |\{f|f: A \rightarrow A \wedge f \searrow\}| = 1, |\{f|f: B \rightarrow A \wedge f \searrow\}| = 6, |\{f|f: A \xrightarrow{na} B\}| = 6 \end{aligned}$$

28. Zaokružiti brojeve ispred jednakosti koje su tačne u skupu kompleksnih brojeva: ☒ $\arg z_1 = \arg z_2 \Leftrightarrow \frac{z_1}{|z_1|} = \frac{z_2}{|z_2|}$

☒ $\sqrt{z\bar{z}} = |z|$ ☒ $Re(z) = \frac{1}{2}(z + |z|)$ ☒ $Im(z) = \frac{1}{2}(z - |z|)$ ☒ $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$ ☒ $|-z_1 - z_2| = |z_1| + |z_2|$
☒ $\bar{z} \in \mathbb{R} \Rightarrow z = \bar{z}$ ☒ $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$ ☒ $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ ☒ $|z| = 1 \Rightarrow z^{-1} = \bar{z}$

29. Ako je $P(x) = ax^2 + bx + c$ polinom nad poljem realnih brojeva i ako je $c \neq 0$, tada stepen $dg(P)$ polinoma P je: ☒ $dg(P) = 2$, ☒ $dg(P) \in \{1, 2\}$, ☒ $dg(P) \in \{0, 2\}$, ☒ $dg(P) \in \{0, 1, 2\}$

30. Zaokružiti brojeve ispred struktura koje su prsteni ali nisu polja: ☒ $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ☒ $(\{9k|k \in \mathbb{Z}\}, +, \cdot)$
☒ $(\mathbb{Z}_9, +, \cdot)$ ☒ $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ ☒ $(\mathbb{Z}_3, +, \cdot)$ ☒ $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ ☒ $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ ☒ $(\mathbb{R}[t], +, \cdot)$ ☒ $(\mathbb{R}^+, +, \cdot)$

31. Ako je p polinom stepena 4 nad nekim poljem F i ako ima tačno jedan koren u tom polju, tada je p : ☒ p uvek svodljiv ☒ p uvek nesvodljiv ☒ nekada svodljiv a nekada nesvodljiv ☒ ništa od prethodnog ☒ p uvek normalizovan

32. Zaokružiti broj (ili brojeve) ispred tvrđenja koje je tačno u Bulovoj algebri $\mathcal{B} = (\{0, 1\}, +, \cdot, ', 0, 1)$.

☒ $xx = x+x$ ☒ $xy = x+y$ ☒ $xx' = (x+1)'$ ☒ $xy = 1 \Rightarrow x = 1$ ☒ $xy = 0 \Rightarrow (x=0 \vee y=0)$
☒ $(x=0 \vee y=0) \Rightarrow xy = 0$ ☒ $x = xy + xy'$ ☒ $(\forall x \in B)(\exists y \in B) x + y = 1 \wedge xy = 0$

33. Zaokružiti asocijativno komutativne grupoide sa neutralnim elementom, koji nisu grupe:

☒ $(\{z \in \mathbb{C} | Im(z) = Re(z)\}, +)$ ☒ $(\{f|f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}, \circ)$ ☒ $(\mathbb{N} \cup \{0\}, +)$ ☒ $(\mathbb{Z}, \cdot)$ ☒ $(\{7k|k \in \mathbb{Z}\}, \cdot)$ ☒ $(\mathbb{R}[x], \cdot)$

34. Zaokružiti podgrupe grupe $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$: ☒ $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, +)$ ☒ $((0, \infty), \cdot)$ ☒ $((-\infty, 0), \cdot)$ ☒ $(\mathbb{N}, \cdot)$
☒ $(\mathbb{Z} \setminus \{0\}, \cdot)$ ☒ $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, +)$ ☒ $((0, 1), \cdot)$ ☒ $(\{-1, 1\}, \cdot)$ ☒ $(\{-1, 0, 1\}, \cdot)$ ☒ $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$

35. Zaokružiti oznaku polja za koje važi da je polinom $t^2 + 2t + 1$ svodljiv nad njima. ☒ $\mathbb{Q}$ ☒ $\mathbb{R}$ ☒ $\mathbb{C}$ ☒ $\mathbb{Z}_2$ ☒ $\mathbb{Z}_3$ ☒ $\mathbb{Z}_5$

36. Neka je $f \in \mathbb{R}[x]$ i $f(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}) = 0$. Zaokruži tačno: ☒ $x^2 + x + 1 \mid f(x)$; ☒ $x^2 + x\sqrt{3} + 1 \mid f(x)$;
☒ $x - e^{-i\frac{\pi}{3}} \mid f(x)$ ☒ $x - e^{i\frac{\pi}{3}} \mid f(x)$ ☒ $x - e^{i\frac{\pi}{3}} \mid f(x)$ ☒ $x^2 - x + 1 \mid f(x)$; ☒ $x^2 - x\sqrt{3} + 1 \mid f(x)$

37. Ako je $z \in \mathbb{C}$ tada: ☒ $\arg z + \arg(-\bar{z}) \in \{-\pi, \pi\}$ ☒ $\arg z = -\arg \bar{z}$ ☒ $|z| = |\bar{z}|$ ☒ $z^{-1} = \bar{z}$ ☒ $|\arg z| = |\arg \bar{z}|$

KOLOKVIJUM 1, PRIMER 6

1. Neka su $f: (0, 1) \rightarrow (0, 1)$ i $g: (0, 1) \rightarrow (0, 1)$ definisane sa $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ i $g(x) = -x + 1$. Izračunati:

☒ $f^{-1}(x) = \sqrt{1-x^2}$ ☒ $g^{-1}(x) = -x+1$ ☒ $(f \circ g)(x) = \sqrt{1-(-x+1)^2}$ ☒ $(f \circ g)^{-1}(x) = \sqrt{1-(-x+1)^2}$ ☒ $(g^{-1} \circ f^{-1})(x) = \sqrt{1-(-x+1)^2}$

2. Bijektivne funkcije su: ☒ $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, $f(x) = x^2$ ☒ $f: [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$, $f(x) = \arccos x$
☒ $f: [\pi, \frac{3\pi}{2}] \rightarrow [-1, 0]$, $f(x) = \cos x$ ☒ $f: [-3, 0] \rightarrow [0, 9]$, $f(x) = x^2$ ☒ $f: (1, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, $f(x) = \ln x$

3. Zaokružiti brojeve ispred tvrđenja koja su tačna u svakoj Bulovoj algebri $(B, +, \cdot, ', 0, 1)$:

☒ $(a')' = a + 1'$ ☒ $a + a' = 0'$ ☒ $a \cdot 0 = (1)'$ ☒ $1 + a = 1'$ ☒ $a + b = (a' + b)'$

4. Skup kompleksnih rešenja jednačine $x^4 = 1$ je $S = \{1, -1, i, -i\}$.

5. Za kompleksni broj $z = e^{i\frac{\pi}{4}} + 1$, naći:

$Re(z^2) = 0$, $Im(z^2) = 2$, $|z| = \sqrt{2}$, $\arg(z) = \frac{\pi}{4}$, $\bar{z} = \sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}}$, $z^3 = \sqrt{2} e^{i\frac{3\pi}{4}}$

6. (•) Sledeće kompleksne brojeve napisati u eksponencijalnom obliku, tj. u obliku $\rho e^{i\varphi}$, $\rho \in [0, \infty)$, $\varphi \in (-\pi, \pi]$:
 $-2^2 = 4 e^{i\pi}$, $(\sqrt{2}i)^2 = 2 e^{i\frac{\pi}{2}}$, $\sqrt{(2i)^2} = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$, $1+i = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$, $3\pi = e^{i3\pi}$, $-2\pi i = e^{i\frac{3\pi}{2}}$
7. (•) Zaokružiti broj (ili brojeve) ispred struktura koje su asocijativno komutativni grupoidi ali nisu grupe.
 ① $(\mathbb{N}, +)$ ② $(\mathbb{N}, \cdot)$ ③ $(\{-1, 0, 1\}, \cdot)$ ④ $(\mathbb{R}, +)$ ⑤ $(\mathbb{R}, \cdot)$ ⑥ $((0, \infty), +)$ ⑦ $(\{-1, 1\}, \cdot)$ ⑧ $((0, \infty), \cdot)$
8. (•) Neka su P i Q proizvoljni nenula polinomi nultog stepena. Tada je $dg(P+Q) \in \{ \emptyset \}$ i $dg(PQ) \in \{ \emptyset \}$.
9. (•) Pri deljenju polinoma x sa $x+1$ nad $\mathbb{R}$, količnik je 1 , a ostatak je -1 .
10. (•) Neka su f i g funkcije definisane sa $f = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ d & a & b & c \end{pmatrix}$, $g = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a & d & c & b \end{pmatrix}$. Tada je $f \circ g = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ d & a & b & c \end{pmatrix}$,
 $f^{-1} = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & c & d & a \end{pmatrix}$, $g^{-1} = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a & d & c & b \end{pmatrix}$, $(f \circ g)^{-1} = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ d & a & b & c \end{pmatrix}$, $f^{-1} \circ g^{-1} = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & c & d & a \end{pmatrix}$.

11. (•) Iza oznake svake od datih relacija u skupu $\mathbb{R}$ zaokružiti samo ona slova koja označavaju svojstvo relacije koju ona poseduje: R- refleksivnost S- simetričnost A- antisimetričnost T- tranzitivnost F- funkcija.
 $\rho = \{(x, \sqrt{1-x^2}) | x \in (0, 1)\} : R \text{ S A T F}$ $\rho = \{(x, y) | x^2 + y^2 = 1\} : R \text{ S A T F}$ $\rho = \{(x, y) | x + y = 1\} : R \text{ S A T F}$
 $R \text{ S A T F} \rho = \{(x, -\frac{1}{x}) | x > 0\} : R \text{ S A T F}$ $\rho = \{(x, -\sqrt{1-x^2}) | x \in (0, 1)\} : R \text{ S A T F}$
12. (•) Zajednički koren polinoma $P(x) = x^2 - \sqrt{2}x + 1$ i $Q(x) = x^2 + i$ je $e^{i\frac{\pi}{4}}$, a $NZD(P, Q) = x - e^{i\frac{\pi}{4}}$.
13. (•) Zajednički koren polinoma $P(x) = x^2 + \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ i $Q(x) = x^3 + 1$ je $e^{i\frac{\pi}{3}}$, a $NZD(P, Q) = x - e^{i\frac{\pi}{3}}$.
14. (•) Zaokružiti broj (ili brojeve) ispred tvrdjenja koja su tačna u svakom domenu integriteta $(F, +, \cdot)$:
 ① $a + bc = (a+b)(a+c)$ ② $(F, +)$ je grupa ③ $(F, \cdot)$ je grupa ④ operacija $+$ je distributivna prema $\cdot$ ⑤ $ab = 0 \Rightarrow a = 0 \vee b = 0$ ⑥ $a \neq 0 \wedge b \neq 0 \Rightarrow ab \neq 0$ ⑦ $a \cdot 0 = 0$ ⑧ $a \cdot (-a) = -a^2$
 ⑨ $a + (-a) = 0$
15. (•) Neka je $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \sqrt{1-x^2}$, inverzna funkcija je
 $g^{-1}(x) = \sqrt{1-x^2}$, $g^{-1} : A \rightarrow \mathbb{R}$, $A = [0, 1]$
16. (•) Neka je funkcija $f : (-\infty, 0] \rightarrow [0, \infty)$ definisana sa $f(x) = x^2$. Tada je $f^{-1}(x) = -\sqrt{x}$.
17. (•) Zaokruži brojeve ispred tačnih iskaza. ① $\arg z \in (0, \pi) \Leftrightarrow I_m(z) > 0$ ② $\arg z < 0 \Rightarrow I_m(z) \leq 0$
 ③ $\arg z < 0 \Leftarrow I_m(z) \leq 0$ ④ $0 < \arg z < \frac{\pi}{2} \Rightarrow R_e(z) > 0$ ⑤ $0 < \arg z < \frac{\pi}{2} \Rightarrow I_m(z) > 0$
18. (•) Neka je A najveći podskup od $\mathbb{R}$ a B najmanji podskup skupa $\mathbb{R}$ za koje je $f : A \rightarrow B$ definisana sa $f(x) = -\sqrt{x+1}$. Tada je $A = [-1, \infty)$, $f(0) = -1$, $f(-1) = 0$ i $B = [-\infty, 0]$, a $f : A \rightarrow B$ je:
 ① bijektivna ② surjektivna ali ne injektivna ③ injektivna ali ne surjektivna ④ ni injektivna ni surjektivna
19. (•) Koje od navedenih struktura su asocijativni grupoidi koji nisu grupe:
 ① $(\{f_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} | f_k(x) = k^2x, k \in \mathbb{R}\}, +)$ ② $(\{f_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} | f_k(x) = kx, k \in \mathbb{R}\}, +)$
 ③ $(\{f_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} | f_k(x) = kx, k \in \mathbb{R}\}, \circ)$ ④ $(\{f_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} | f_k(x) = k^2x, k \in \mathbb{R}\}, \circ)$
 ⑤ $(\{f_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} | f_k(x) = kx, k \in \mathbb{R}^+\}, \circ)$
20. (•) Neka su z, u, w kompleksni brojevi. Tada rotacijom tačke z oko tačke u za ugao $\frac{\pi}{2}$ dobija se tačka $u + (z-u)e^{i\frac{\pi}{2}}$, translacijom tačke z za vektor w dobija se tačka $z+w$, a $\angle uzv = \angle \frac{v-z}{u-z}$.
21. (•) Neka je A najveći podskup od $\mathbb{R}$ a B najmanji podskup skupa $\mathbb{R}$ za koje je $f : A \rightarrow B$ definisana sa $f(x) = \arctg(x-2)$. Tada je $A = \mathbb{R}$, $f(1) = -\frac{\pi}{4}$, $f(2) = 0$ i $B = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, a $f : A \rightarrow B$ je:
 ① bijektivna ② surjektivna ali ne injektivna ③ injektivna ali ne surjektivna ④ niti injektivna niti surjektivna
22. (•) Funkcija $f : (0, \frac{5\pi}{6}) \rightarrow (-\frac{9}{10}, 1)$ definisana sa $f(x) = \cos x$ je: ① surjektivna i nije injektivna
 ② injektivna i nije surjektivna ③ nije injektivna i nije surjektivna ④ bijektivna
23. (•) Funkcija $f : (-\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{6}) \rightarrow [-1, -\frac{1}{3}]$ definisana sa $f(x) = \sin x$ je: ① surjektivna i nije injektivna
 ② injektivna i nije surjektivna ③ nije injektivna i nije surjektivna ④ bijektivna

24. Funkcija $f: (-\frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{6}) \setminus \{-\frac{\pi}{2}\} \rightarrow \mathbb{R}$ definisana sa $f(x) = \operatorname{tg} x$ je: **1)** surjektivna i nije injektivna
2) injektivna i nije surjektivna 3) nije injektivna i nije surjektivna 4) bijektivna

25. Navesti geometrijsku interpretaciju skupova A, B, C, D, E i sledećih kompleksnih funkcija $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $g: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $h: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ i $s: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, kao i odgovoriti na pitanje injektivnosti i surjektivnosti funkcija f i g .

$f(z) = \bar{z}e^{-i\pi}$ je odraz zrcaljenja u odnosu na imaginarnu osu bijektivna

$g(z) = -\bar{z}$ je odraz zrcaljenja u odnosu na realnu osu bijektivna

$h(z) = I_m(z)$ je projekcija na imaginarnu osu nije injektivna

greška $s(z) = z \cdot \frac{i-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ je rotacija za $-\frac{\pi}{2}$ bijektivna

greška $A = \{z|z^3 = -1\}$ je temena jednakostraničnog trougla sa centrom u 0

$B = \{z||z^3| = -1\}$ je prazan skup

$C = \{z|z = -\bar{z}\}$ je koordinatni početni tačku 0

$D = \{z|\arg(-z) = \arg(-\bar{z})\}$ je cela kompleksna ravan bez koordinatnog početka

$E = \{z|I_m(z) = iR_e(z)\}$ je koordinatni početak

Zaokružiti slova ispred tačnih iskaza: ~~a) $A \subset B$~~ ~~b) $C \subseteq D$~~ ~~c) $D \subseteq C$~~ **d) $B \subseteq D$** ~~e) $D \subseteq E$~~

26. Neka je $\{1, i\}$ skup nekih korena polinoma $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, gde su $a, b, c \in \mathbb{R}$. Tada je
 $a \in \{-1\}$, $b \in \{1\}$, $c \in \{-1\}$

27. Neka je $A = \{1, 2, 3\}$ i $B = \{1, 2, 3, 4\}$. Odrediti broj elemenata sledećih skupova funkcija ako f označava rastuću funkciju f i $f \nearrow$ označava neopadajuću funkciju f :

$$\begin{aligned} |\{f|f: A \rightarrow B\}| &= 64, |\{f|f: A \xrightarrow{1-1} B\}| = 12, |\{f|f: A \rightarrow B \wedge f \nearrow\}| = 4, |\{f|f: B \xrightarrow{na} B\}| = 24, \\ |\{f|f: B \rightarrow A\}| &= 12, |\{f|f: A \rightarrow A \wedge f \nearrow\}| = 1, |\{f|f: B \rightarrow A \wedge f \nearrow\}| = 12, |\{f|f: A \xrightarrow{na} B\}| = 0. \end{aligned}$$

28. U skupu kompleksnih brojeva je: **1)** $\sqrt{z\bar{z}} = \pm|z|$ **2)** $(\forall \varphi \in (-\pi, \pi]) (e^{i\varphi})^{-1} = \overline{e^{i\varphi}}$ **3)** $|z| = 1 \Rightarrow z^{-1} = \bar{z}$
4) $-i\operatorname{Im}(z) = \frac{1}{2}(-z + \bar{z})$ **5)** $\operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$ **6)** $z_1 - z_2 = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$ **7)** $|z| = 1 \Leftrightarrow z^{-1} = \bar{z}$
8) $|-z_1 - z_2| = |z_1| + |z_2|$ **9)** $(\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\})(\exists k \in \mathbb{R}^+) \vec{Oz_1} = k\vec{Oz_2} \Leftrightarrow \arg z_1 = \arg z_2 \Leftrightarrow \frac{z_1}{|z_1|} = \frac{z_2}{|z_2|}$

29. Ako je $P(x) = ax^3 + bx + c$ polinom nad poljem realnih brojeva i ako je $c \neq 0$, tada stepen $dg(P)$ polinoma P je: 1) $dg(P) = 3$, **2)** $dg(P) \in \{1, 3\}$, **3)** $dg(P) \in \{0, 3\}$, **4)** $dg(P) \in \{0, 1, 3\}$, 5) $dg(P) \in \{0, 1, 2, 3\}$

30. Zaokružiti brojeve ispred struktura koje su domeni integriteta ali nisu polja: **1)** $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$
2) $(\{9k|k \in \mathbb{Z}\}, +, \cdot)$ **3)** $(\mathbb{Z}_9, +, \cdot)$ ~~4) $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$~~ ~~5) $(\mathbb{Z}_3, +, \cdot)$~~ ~~6) $(\mathbb{N}, +, \cdot)$~~ ~~7) $(\mathbb{C}, +, \cdot)$~~
8) $(\mathbb{R}[t], +, \cdot)$ ~~9) $(\mathbb{R}^+, +, \cdot)$~~

31. Ako je p polinom stepena 4 nad nekim poljem F i ako nema koren u tom polju, tada je p : 1) uvek svodljiv
2) uvek nesvodljiv **3)** nekada svodljiv a nekada nesvodljiv 4) ništa od prethodnog 5) uvek normalizovan

32. Zaokružiti broj (ili brojeve) ispred tvrdjenja koje je tačno u Bulovoj algebri $B = (\{0, 1\}, +, \cdot, ', 0, 1)$.

$$\begin{aligned} \text{1) } xx &= x+x \quad \text{2) } xy = x+y \quad \text{3) } xx' = (x+1)' \quad \text{4) } xy = 1 \Rightarrow x = 1 \quad \text{5) } xy = 0 \Rightarrow (x=0 \vee y=0) \\ \text{6) } (x=0 \vee y=0) &\Rightarrow xy = 0 \quad \text{7) } x = xy + xy' \quad \text{8) } (\forall x \in B)(\exists y \in B) x + y = 1 \wedge xy = 0 \end{aligned}$$

33. Zaokružiti asocijativno komutativne grupoide sa neutralnim elementom, koji nisu grupe: **1)** $(\mathbb{R}[x], \cdot)$
~~2) $(\{z \in \mathbb{C} | \operatorname{Im}(z) = \operatorname{Re}(z)\}, +)$~~ ~~3) $(\{f|f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}, \circ)$~~ **4)** $(\mathbb{N} \cup \{0\}, +)$ **5)** $(\mathbb{Z}, \cdot)$ ~~6) $(\{7k|k \in \mathbb{Z}\}, \cdot)$~~

34. Zaokružiti podgrupe grupe $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$: ~~1) $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, +)$~~ **2)** $((0, \infty), \cdot)$ ~~3) $((-\infty, 0), \cdot)$~~ ~~4) $(\mathbb{N}, \cdot)$~~
~~5) $(\mathbb{Z} \setminus \{0\}, \cdot)$~~ ~~6) $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, +)$~~ ~~7) $((0, 1), \cdot)$~~ **8)** $(\{-1, 1\}, \cdot)$ ~~9) $(\{-1, 0, 1\}, \cdot)$~~ **10)** $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$

35. Zaokružiti oznaku polja za koje važi da je polinom $t^2 + 2t + 1$ svodljiv nad njima. ~~$\mathbb{Q}$~~ ~~$\mathbb{R}$~~ ~~$\mathbb{C}$~~ ~~$\mathbb{Z}_2$~~ **$\mathbb{Z}_3$** **$\mathbb{Z}_5$**

36. Neka je $f \in \mathbb{R}[x]$ i $f(e^{i\pi}) = 0$. Tada važi:

$$1) x-1 | f(x); \quad \text{2) } x+1 | f(x); \quad 3) x^2+1 | f(x); \quad 4) x^2-1 | f(x); \quad 5) x-e^{-i\pi} | f(x) \quad \text{6) } x-e^{i\pi} | f(x)$$

37. Koje jednakosti su tačne za sve kompleksne brojeve z za koje su i definisane: **1)** $|\arg z + \arg(-\bar{z})| = \pi$
2) $z\bar{z} = |z|^2$ **3)** $\arg z = -\arg \bar{z}$ ~~4) $z^{-1} = \bar{z}|z|^{-2}$~~ ~~5) $|z| = |\bar{z}|$~~ ~~6) $|\arg z| = |\arg \bar{z}|$~~ **7)** $e^{i\varphi} = (e^{i\varphi})^{-1}$

KOLOKVIJUM 1, PRIMER 7

1. Neka je funkcija $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ definisana sa $f(x) = e^{3-2x}$. Tada je:
 1) $f^{-1}(x) = e^{\frac{3-x}{2}}$ 2) $f^{-1}(x) = e^{3-2x}$ 3) $f^{-1}(x) = \ln x$ 4) $f^{-1}(x) = \frac{3-\ln x}{2}$ 5) $f^{-1}(x) = \ln(3-2x)$
 6) $f^{-1}(x) = \log_{3-2x} x$ 7) $f^{-1}(x) = \ln \sqrt{x-1}e^3$

2. Neka su $f: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ i $g: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ definisane sa $f(x) = e^x - 1$ i $g(x) = \frac{1}{x^2}$. Izračunati:
 1) $f^{-1}(x) = \ln(x+1)$ 2) $g^{-1}(x) = \frac{\sqrt{x}}{x}$ 3) $(f \circ g)(x) = \frac{1}{x^2} - 1$ 4) $(f \circ g)^{-1}(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$ 5) $(g^{-1} \circ f^{-1})(x) = \frac{1}{(e^x - 1)^2}$

3. Injektivne funkcije su: 1) $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ 2) $f: [-1, 1] \rightarrow [0, 2\pi]$, $f(x) = \arccos x$
 3) $f: [-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \cos x$ 4) $f: [-3, 3] \rightarrow [0, 9]$, $f(x) = x^2$ 5) $f: (1, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, $f(x) = \ln x^2$

4. Zaokružiti brojeve ispred tvrđenja koja su tačna u svakoj Bulovoj algebri $(B, +, \cdot, ', 0, 1)$:
 1) $(a')'0' = a + 1'$ 2) $a + a' = 1'$ 3) $a \cdot 0' = (1')'$ 4) $1 + a = 0'$ 5) $ab = (a' + b')'$

5. Skup S svih kompleksnih rešenja jednačine $x^4 = 0$ je $S = \{ \quad 0 \quad \}$.

6. Za kompleksni broj $z = e^{i\frac{\pi}{3}} - 1$, naći:
 $Re(z) = -\frac{1}{2}$, $Im(z) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $|z| = 1$, $\arg(z) = \frac{2\sqrt{3}}{2}$, $\bar{z} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$, $z^2 = e^{-i\frac{2\pi}{3}}$.

7. Sledeće kompleksne brojeve napisati u eksponencijalnom obliku, odnosno u obliku $\rho e^{i\varphi}$, $\rho \in [0, \infty)$, $\varphi \in (-\pi, \pi]$:
 $-2-2i = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\frac{3\pi}{4}}$, $(\sqrt{-2i})^2 = 2 e^{-i\frac{\pi}{4}}$, $\sqrt{(-2i)^2} = \frac{1}{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$, $-2-2i = 2\sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}}$, $-5\pi = 5 e^{i\pi}$, $3\pi i = 3 e^{i\frac{\pi}{2}}$

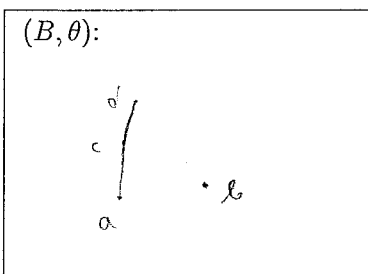
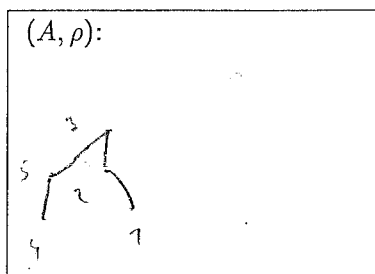
8. Zaokružiti brojeve ispred struktura koje su grupe.
 1) $(\{-1, 1\}, +)$ 2) $(\{z \in \mathbb{C} | Im(z) = Re(z)\}, +)$
 3) $(\{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}, \circ)$ 4) $(\mathbb{N}, +)$ 5) $(\{2k | k \in \mathbb{Z}\}, \cdot)$ 6) $(\mathbb{R}[x], \cdot)$ 7) $(\{\frac{m}{2} | m \in \mathbb{Z}\}, +)$

9. Ako su P i $Q \neq -P$ polinomi i $dg(P) = dg(Q) = 3$, tada je
 $dg(PQ) \in \{ \underline{6} \}$ i $dg(P+Q) \in \{ \underline{0, 7, 2, 3} \}$

10. Za polinome $p(x) = (x+1)^2 x(x-2)^6$ i $q(x) = x^5(x+1)(x-5)^2(x-1)^3$ nad poljem realnih brojeva izračunati: $NZD(p, q) = (x+1)x$

11. Neka je $A = \{1, 2, 3\}$, $f: A \rightarrow A$ i $g: A \rightarrow A$ funkcije definisane sa $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Tada je
 $f^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $g^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $f \circ f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $f \circ g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $f^{-1} \circ g^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $(g \circ f)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

12. Neka je $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $\rho = \{(x, x) | x \in A\} \cup \{(1, 2), (1, 3), (2, 3), (4, 5), (4, 3), (5, 3)\}$,
 $B = \{a, b, c, d\}$ i $\theta = \{(x, x) | x \in B\} \cup \{(a, c), (a, d), (c, d)\}$. Nacrtati Haseove dijagrame i popuniti tabelu, odnosno staviti / tamo gde traženo ne postoji.



	(A, ρ)	(B, θ)
minimalni	1, 4	a, b
maksimalni	3	d, c
najveći	3	/
najmanji	/	/

13. Iza oznake svake od datih relacija u skupu $\mathbb{R}$ zaokružiti samo ona slova koja označavaju svojstvo relacije koju ona poseduje: R- refleksivnost S- simetričnost A- antisimetričnost T- tranzitivnost F- funkcija.

$\rho = \{(x, \sqrt{1-x^2}) | x \in (-1, 0)\}$: R S ☒ A ☒ T ☒ F $\rho = \{(x, e^x) | x \in \mathbb{R}\}$: R S ☒ A ☒ T ☒ F

$\rho = \{(x, \ln x) | x \in \mathbb{R}\}$: R S ☒ A ☒ T ☒ F $\rho = \{(x, -\frac{1}{x}) | x > 0\}$: R S ☒ A ☒ T ☒ F

$\rho = \{(x, -\sqrt{1-x^2}) | x \in (-1, 0)\}$: R ☒ S ☒ A ☒ T ☒ F

14. Ako je $f: A \rightarrow B$ surjektivna funkcija i $b \in B$, tada broj rešenja po $x \in A$ jednačine $f(x) = b$ može biti (zaokruži) 0 ☒ 1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ ∞

15. Ako je $f: A \rightarrow B$ injektivna funkcija i $b \in B$, tada broj rešenja po $x \in A$ jednačine $f(x) = b$ može biti (zaokruži) 0 1 2 3 ∞

16. Zaokružiti brojeve ispred tvrdjenja koja su tačna u polju $(F, +, \cdot)$, a nisu u domenu integriteta. 1) $a \cdot 0 = 0$ 2) $a + bc = (a+b)(a+c)$ 3) $(F, +)$ je grupa 4) $(F \setminus \{0\}, \cdot)$ je grupa 5) operacija $+$ je distributivna prema $\cdot$ 6) $ab = 0 \Rightarrow a = 0 \vee b = 0$ 7) $a \neq 0 \wedge b \neq 0 \Rightarrow ab \neq 0$ 8) $(\forall a \in F \setminus \{0\})(\exists b \in F)ab = 1$ 9) $a + (-a) = 0$

17. Neka je $g: (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = -\sqrt{1-x^2}$, inverzna funkcija je $g^{-1}(x) = \sqrt{1-x^2}$, $g^{-1}: A \rightarrow \mathbb{R}$, $A = [-1, 0]$

18. Neka je funkcija $f: (-\infty, -\frac{1}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$ definisana sa $f(x) = x^2 + x + 1$. Tada $f^{-1}: A \rightarrow \mathbb{R}$, $A = [\frac{3}{4}, \infty)$

19. Zaokruži brojeve ispred tačnih iskaza. 1) $\arg z \in (0, \pi] \Leftrightarrow I_m(z) > 0$ 2) $\arg z \leq 0 \Rightarrow I_m(z) \leq 0$ 3) $\arg z \leq 0 \Leftarrow I_m(z) \leq 0$ 4) $0 < \arg z \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow R_e(z) > 0$ 5) $-\frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{\pi}{2} \Leftarrow R_e(z) > 0$

20. Komutativne grupe su:

- 1) $(\{f_k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} | f_k(x) = k^2x, k \in \mathbb{R}\}, +)$ 2) $(\{f_k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} | f_k(x) = kx, k \in \mathbb{R}\}, +)$
3) $(\{f_k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} | f_k(x) = kx, k \in \mathbb{R}\}, \circ)$ 4) $(\{f_k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} | f_k(x) = k^2x, k \in \mathbb{R}\}, \circ)$
5) $(\{f | f: \mathbb{R} \xrightarrow{1-1} \mathbb{R}\}, \circ)$

21. Neka su u, z, w kompleksni brojevi. Tada rotacijom tačke w oko tačke z za ugao $-\frac{\pi}{2}$ dobija se tačka $z + (w-z)e^{-i\frac{\pi}{2}}$, translacijom tačke z za vektor w dobija se tačka $z+w$, a $\arg zwu = \arg(\frac{u-z}{w-z})$

22. Navesti geometrijsku interpretaciju sledećih kompleksnih funkcija $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $g: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $h: \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ i $s: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, kao i odgovoriti na pitanje injektivnosti i surjektivnosti funkcija f, g, h i s .

$f(z) = \bar{z}e^{-i\frac{\pi}{2}}$ je onda simetrija oko pravca koji prolazi kroz 0 i 1 bijekcija
 $g(z) = |z|e^{i\arg z} \wedge g(0) = 0$ je identička funkcija bijekcija
 $h(z) = e^{i\arg z}$ je projekcija na $X(0,1)$ sa svake tačke na kružnicu
 $s(z) = -z \cdot \frac{i+1}{\sqrt{2}}$ je rotacija za $-\frac{\pi}{4}$ bijekcija

23. Neka je $\{1, 3\}$ skup svih korena polinoma $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, gde su $a, b, c \in \mathbb{R}$. Tada je $a \in \{-7, -5\}$, $b \in \{7, 18\}$, $c \in \{-3, -3\}$

24. Neka je $A = \{1, 2, 3\}$ i $B = \{1, 2\}$. Odrediti broj elemenata sledećih skupova funkcija ako $f \nearrow$ označava rastuću funkciju f i $f \searrow$ označava neopadajuću funkciju f :

$$\begin{aligned} |\{f | f: A \rightarrow B\}| &= 9, |\{f | f: A \xrightarrow{1-1} B\}| = 0, |\{f | f: A \rightarrow B \wedge f \nearrow\}| = 0, |\{f | f: B \xrightarrow{nq} A\}| = 2, \\ |\{f | f: B \rightarrow A\}| &= 3, |\{f | f: A \rightarrow A \wedge f \nearrow\}| = 1, |\{f | f: B \rightarrow A \wedge f \searrow\}| = 6, |\{f | f: A \xrightarrow{nq} B\}| = 6. \end{aligned}$$

25. U skupu kompleksnih brojeva je: 1) $\sqrt{z\bar{z}} = \pm|z|$ 2) $z = e^{i\varphi} \Rightarrow z^{-1} = \bar{z}$ 3) $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$ 4) $R_e(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$ 5) $\overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$ 6) $|z| = 1 \Leftarrow z^{-1} = \bar{z}$ 7) $|-z_1 - z_2| = |z_1| + |z_2|$ 8) $|z_1| |z_2| = |z_1 z_2| \Leftarrow \arg z_1 = \arg z_2$

26. Ako je $P(x) = ax^4 + bx^2 + cx$ polinom nad poljem realnih brojeva i ako je $c \neq 0$, tada stepen $dg(P)$ polinoma P je: 1) $dg(P) = 4$, 2) $dg(P) \in \{1, 4\}$, 3) $dg(P) \in \{0, 4\}$, 4) $dg(P) \in \{1, 2, 4\}$, 5) $dg(P) \in \{0, 1, 2, 4\}$

27. Zaokružiti brojeve ispred struktura koje su prsteni ali nisu domeni integriteta:

- 1) $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ 2) $(\{9k | k \in \mathbb{Z}\}, +, \cdot)$ 3) $(\mathbb{Z}_9, +, \cdot)$ 4) $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ 5) $(\mathbb{Z}_3, +, \cdot)$ 6) $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ 7) $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ 8) $(\mathbb{R}[t], +, \cdot)$ 9) $(\mathbb{R}^+, +, \cdot)$

28. Ako je p polinom stepena 3 nad nekim poljem F i ako nema koren u tom polju, tada je p : 1) uvek svodljiv 2) uvek nesvodljiv 3) nekada svodljiv a nekada nesvodljiv 4) ništa od prethodnog 5) uvek normalizovan

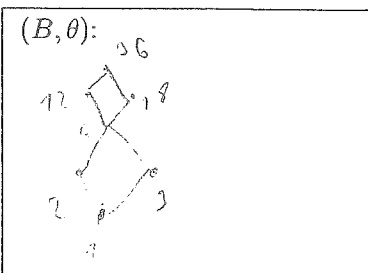
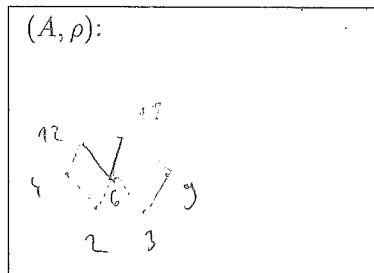
19. Zaokružiti broj (ili brojeve) ispred tvrđenja koje je tačno u Bulovoj algebri $B = (B, +, \cdot, ', 0, 1)$.
~~1) $(xy)' = x + y$~~ ~~2) $(xx')' = (x + 1)'$~~ ~~3) $x \neq 1 \Rightarrow xy \neq 1$~~ ~~4) $(x \neq 0 \wedge y \neq 0) \Rightarrow xy \neq 0$~~
~~5) $xy \neq 0 \Rightarrow (x \neq 0 \wedge y \neq 0)$~~ ~~6) $x = xy + xy' + x$~~ ~~7) $xx = x + x$~~
~~8) $(\forall x \in B)(\exists y \in B) x + y = 1 \wedge xy = 0$~~
20. Napisati jedan primer konačne nekomutativne grupe i jedan primer beskonačne nekomutativne grupe
 Konačna: $(\{1, 2, 3, 4\}, \cdot)$. Beskonačna: $(\{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}, \circ)$
21. Zaokružiti podgrupe grupe $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$: ~~1) $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, +)$~~ ~~2) $((0, \infty), \cdot)$~~ ~~3) $((-\infty, 0), \cdot)$~~ ~~4) $(\mathbb{N}, \cdot)$~~
~~5) $(\mathbb{Z} \setminus \{0\}, \cdot)$~~ ~~6) $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, +)$~~ ~~7) $((0, 1), \cdot)$~~ ~~8) $(\{-1, 1\}, \cdot)$~~ ~~9) $(\{-1, 0, 1\}, \cdot)$~~ ~~10) $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$~~
22. Zaokružiti oznaku polja za koje važi da je polinom $t^4 + t^2 + 1$ svodljiv nad njima. ~~Q~~ ~~R~~ ~~C~~ ~~Z₂~~ ~~Z₃~~ ~~Z₅~~
23. Neka je $f \in \mathbb{R}[x]$ i $f(e^{-i\frac{\pi}{2}}) = 0$. Tada važi:
~~1) $x - i \mid f(x)$~~ ~~2) $x + i \mid f(x)$~~ ~~3) $x^2 + 1 \mid f(x)$~~ ~~4) $x^2 - 1 \mid f(x)$~~ ~~5) $x - e^{-i\frac{\pi}{2}} \mid f(x)$~~ ~~6) $x - e^{i\frac{\pi}{2}} \mid f(x)$~~
 Koje jednakosti su tačne za sve $z \in \mathbb{C}$ i sve $\varphi \in (-\pi, \pi]$ za koje su i definisane: ~~1) $e^{i\varphi} = e^{i\varphi}$~~ ~~2) $e^{i\varphi} = e^{i\varphi}$~~
~~3) $\arg z + \arg(-\bar{z}) \in \{-\pi, \pi\}$~~ ~~4) $\arg z + \arg \bar{z} = 0$~~ ~~5) $z^{-1}|z|^2 = \bar{z}$~~ ~~6) $|z| = |\bar{z}|$~~ ~~7) $|\arg z| = |\arg \bar{z}|$~~

KOLOKVIJUM 1, PRIMER 8

1. Neka je funkcija $f: \mathbb{R} \setminus \{2\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{3\}$ definisana sa $f(x) = \frac{3x-1}{x-2}$. Tada je: $f^{-1}(x) = \frac{x+1}{x-3}$
2. Neka su $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ i $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definisane sa $f(x) = 2x + 1$ i $g(x) = x^3 - 1$. Izračunati:
 1) $f^{-1}(x) = \frac{x-1}{2}$ 2) $g^{-1}(x) = \sqrt[3]{x+1}$ 3) $(f \circ g)(x) = \frac{2x^3-1}{2}$ 4) $(f \circ g)^{-1}(x) = \sqrt[3]{\frac{x+1}{2}}$ 5) $(g^{-1} \circ f^{-1})(x) = \sqrt[3]{\frac{x-1}{2}}$
3. Surjektivne funkcije su: ~~1) $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$~~ ~~2) $f: [-1, 1] \rightarrow [0, 2\pi], f(x) = \arccos x$~~
~~3) $f: [-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}] \rightarrow [\frac{1}{2}, 1], f(x) = \cos x$~~ ~~4) $f: [-3, 3] \rightarrow [0, 9], f(x) = x^2$~~
~~5) $f: (1, \infty) \rightarrow [0, \infty), f(x) = \ln x^2$~~
4. Zaokružiti brojeve ispred tvrđenja koja su tačna u svakoj Bulovoj algebri $(B, +, \cdot, ', 0, 1)$:
~~1) $(a')'0' = a + 1$~~ ~~2) $a' + a' = a' + 1'$~~ ~~3) $a \cdot 0' = (a')'$~~ ~~4) $1 + a = a'$~~ ~~5) $(ab) = (a' + b')'$~~
5. Skup S svih kompleksnih rešenja jednačine $e^{ix} = 0$ je $S = \{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$
6. Za kompleksni broj $z = e^{i\frac{\pi}{2}} - 1$, naći:
 $Re(z) = -1$, $Im(z) = -1$, $|z| = \sqrt{2}$, $\arg(z) = \frac{3\pi}{4}$, $\bar{z} = \sqrt{2}e^{-i\frac{3\pi}{4}}$, $z^2 = -2i$
7. Sledeće kompleksne brojeve napisati u eksponencijalnom obliku, odnosno u obliku $\rho e^{i\varphi}$, $\rho \in [0, \infty)$, $\varphi \in (-\pi, \pi]$:
 $-2i = 2e^{-i\frac{\pi}{2}}$, $(\sqrt[3]{i})^3 = e^{i\frac{\pi}{2}}$, $\sqrt[3]{i^3} \in \{e^{i\frac{\pi}{6}}, e^{i\frac{5\pi}{6}}, e^{i\frac{3\pi}{2}}\}$, $-2 - 2i = 2\sqrt{2}e^{-i\frac{3\pi}{4}}$, $-5\pi = 5\pi e^{i\pi}$, $3\pi i = 3\pi e^{i\frac{\pi}{2}}$
8. Zaokružiti brojeve ispred struktura koje su asocijativni grupoidi sa neutralnim elementom.
~~1) $(\{-1, 1\}, +)$~~ ~~2) $(\{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}, \circ)$~~ ~~3) $(\mathbb{N}, +)$~~ ~~4) $(\{2k \mid k \in \mathbb{Z}\}, \cdot)$~~
~~5) $(\mathbb{R}[x], \cdot)$~~ ~~6) $(\{\frac{m}{2} \mid m \in \mathbb{Z}\}, +)$~~
9. Ako su P i $Q \neq -P$ polinomi i $dg(P) = dg(Q) = 0$, tada je
 $dg(PQ) \in \{0\}$ i $dg(P+Q) \in \{0\}$
10. Za polinome $p(x) = (x+1)^2x(x-2)^6$ i $q(x) = x^5(x+1)^3(x-5)^2(x-2)^3$ nad poljem realnih brojeva izračunati: $NZD(p, q) = x^2(x-2)^3$

11. Neka je $A = \{1, 2, 3\}$, $f: A \rightarrow A$ i $g: A \rightarrow A$ funkcije definisane sa $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Tada je
 $f^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ $g^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ $f \circ f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ $g \circ f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ $f^{-1} \circ g^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ $(g \circ f)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

13. • Neka je ρ relacija „deli” skupa $A = \{2, 3, 4, 6, 9, 12, 18\}$ i neka je θ relacija „deli” skupa $B = \{1, 2, 3, 6, 12, 18, 36\}$. Nacrtati Haseove dijagrame i popuniti tabelu, odnosno staviti / tamo gde traženo ne postoji.



	(A, ρ)	(B, θ)
minimalni	2, 3	1
maksimalni	12, 18	36
najveći	/	36
najmanji	/	1

14. • U Bulovoj algebri $B = (B, +, \cdot, ', 0, 1)$ važi:
 1) $x + y = x'y'$ 2) $xy = (x' + y')$ 3) $xy = 1 \Rightarrow y = 1$
 4) $x = y \Rightarrow x' = y'$ 5) $x' = y' \Rightarrow x = y$ 6) $f(x) = x' \Rightarrow f : B \xrightarrow{\text{na}} B$ 7) $f(x) = x' \Rightarrow f : B \xrightarrow{1-1} B$

15. • Za funkciju $f : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ iz grupe $(\mathbb{R}, +)$ u grupu $((0, \infty), \cdot)$, definisanu sa $f(x) = 2^x$, važi:
 1) f je homomorfizam 2) f je izomorfizam 3) f^{-1} postoji i f^{-1} je homomorfizam 4) f^{-1} je izomorfizam

16. • Zaokružiti polja nad kojima je polinom $t^3 + t + 1$ svodljiv: $\mathbb{Q}$ $\mathbb{R}$ $\mathbb{C}$ $\mathbb{Z}_2$ $\mathbb{Z}_3$

17. • Skup svih mogućih stepena nesvodljivih polinoma nad poljem realnih brojeva $\mathbb{R}$ je $\{1, 2, \dots\}$

18. • U prstenu polinoma, za svaki polinom p važi:
 1) ako je p jednak proizvodu dva polinoma, tada je p svodljiv 2) ako je $p = 0$, tada je on svodljiv 3) ako je $p = 0$, tada je on nesvodljiv 4) ako je p svodljiv tada je $p \neq 0$ i $dg(p) \neq 0$ i p je jednak proizvodu dva polinoma stepena većeg od 0 5) ako je $p \neq 0$ i $dg(p) \neq 0$ i p je jednak proizvodu dva polinoma stepena većeg od 0, tada je p je svodljiv

19. • Neka su $p(x) = 2x + 1$ i $q(x) = x^2 + 2$ polinomi nad poljem $\mathbb{Z}_7$ i $A = (\mathbb{Z}_7[x]/p, +, \cdot)$ i $B = (\mathbb{Z}_7[x]/q, +, \cdot)$. Tada su polja:
 a) Samo A b) Samo B c) A i B d) Ni A ni B .

20. • Neka je $g : (-\infty, 1] \rightarrow (-\infty, 0]$, $g(x) = -\sqrt{1-x}$. Tada inverzna funkcija je $g^{-1}(x) = 1 - x^2$

21. • Neka je funkcija $f : (-\infty, -\frac{1}{4}] \rightarrow \mathbb{R}$ definisana sa $f(x) = -2x^2 - x - 2$. Tada $f^{-1} : A \rightarrow \mathbb{R}$, $A = (-\infty, -\frac{15}{2}]$

22. • Zaokruži brojeve ispred tačnih iskaza.
 1) $\arg z > 0 \Rightarrow I_m(z) > 0$ 2) $\arg z < 0 \Rightarrow I_m(z) < 0$
 3) $\arg z < 0 \Leftrightarrow I_m(z) < 0$ 4) $\arg z > 0 \Leftrightarrow I_m(z) > 0$ 5) $\arg z \notin [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \Rightarrow R_e(z) < 0$

23. • Grupe su:
 1) $(\{f_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f_k(x) = k^2x, k \in \mathbb{R}\}, +)$ 2) $(\{f_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f_k(x) = kx, k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}, \circ)$
 3) $(\{f_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f_k(x) = kx, k \in \mathbb{R}\}, +)$ 4) $(\{f_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f_k(x) = k^2x, k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}, \circ)$
 5) $(\{f \mid f : \mathbb{R} \xrightarrow{1-1} \mathbb{R}\}, \circ)$

24. • Neka su u, z, w kompleksni brojevi. Tada rotacijom tačke u oko tačke w za ugao $-\frac{\pi}{4}$ dobija se tačka $w + (u-w)e^{-i\frac{\pi}{4}}$; translacijom tačke w za vektor u dobija se tačka $w + u$, a $\angle uwz = \arg(\frac{z-w}{u-w})$

25. • Navesti geometrijsku interpretaciju sledećih kompleksnih funkcija $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $h : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ i $s : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, kao i odgovoriti na pitanje injektivnosti i surjektivnosti funkcija f, g, h i s .

$f(z) = \bar{z}e^{i\pi}$ je odraz u odnosu na imaginarnu os

$g(z) = |z|e^{i\arg(-z)} \wedge g(0) = 0$ je simetrija oko koordinatnog početka

$h(z) = e^{i\arg|z|}$ je projekcija na točku 1

$s(z) = -z \cdot (\cos \frac{\pi}{5} + i \sin \frac{\pi}{5})$ je rotacija za ugao $-\frac{4\pi}{5}$

26. • Neka je $\{1\}$ skup svih korena polinoma $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, gde su $a, b, c \in \mathbb{R}$. Tada je
 $a \in \{-3\}$, $b \in \{3\}$, $c \in \{-1\}$

27. • Neka je $A = \{1\}$ i $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Odrediti broj elemenata sledećih skupova funkcija ako $f \nearrow$ označava rastuću funkciju i $f \nearrow$ označava neopadajuću funkciju f :

$$|\{f \mid f : A \rightarrow B\}| = 5 \quad |\{f \mid f : A \xrightarrow{1-1} B\}| = 5 \quad |\{f \mid f : A \rightarrow B \wedge f \nearrow\}| = 5 \quad |\{f \mid f : B \xrightarrow{na} B\}| = 120$$

$$|\{f \mid f : B \rightarrow A\}| = 1 \quad |\{f \mid f : A \rightarrow A \wedge f \nearrow\}| = 1 \quad |\{f \mid f : B \rightarrow A \wedge f \nearrow\}| = 1 \quad |\{f \mid f : A \xrightarrow{na} B\}| = 0$$

27. • U skupu kompleksnih brojeva je: ~~1)~~ $\sqrt{z\bar{z}} = |z|$ ~~2)~~ $z = e^{i\frac{\pi}{7}} \Rightarrow z^{-1} = \bar{z}$ ~~3)~~ $|z_1 z_2| = |z_2| |z_1|$
~~4)~~ $Re(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$ ~~5)~~ $\bar{z_1} - \bar{z_2} = \overline{z_2 - z_1}$ ~~6)~~ $|z| = 1 \Leftrightarrow z^{-2} = \bar{z}^2$ ~~7)~~ $|-z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2|$
~~8)~~ $|z_1| |z_2| = |z_2| |z_1| \Rightarrow \arg z_1 = \arg z_2$
28. • Ako je $P(x) = ax^3 + bx + c$ polinom nad poljem realnih brojeva i ako je $c \neq 0$, tada stepen $dg(P)$ polinoma P je: ~~1)~~ $dg(P) = 3$ ~~2)~~ $dg(P) \in \{0, 1, 3\}$ ~~3)~~ $dg(P) \in \{0, 3\}$ ~~4)~~ $dg(P) \in \{0, 1, 3, 4\}$ ~~5)~~ $dg(P) \in \{0, 1, 2, 3\}$
29. • Zaokružiti brojeve ispred struktura koje su domeni integriteta, a nisu polja:
~~1)~~ $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ~~2)~~ $(\{9k | k \in \mathbb{Z}\}, +, \cdot)$ ~~3)~~ $(\mathbb{Z}_9, +, \cdot)$ ~~4)~~ $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ ~~5)~~ $(\mathbb{Z}_3, +, \cdot)$ ~~6)~~ $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ ~~7)~~ $(\mathbb{C}, +, \cdot)$
~~8)~~ $(\mathbb{R}[t], +, \cdot)$ ~~9)~~ $(\mathbb{R}^+, +, \cdot)$
30. • Ako je p svodljiv polinom stepena 4 nad nekim poljem F , tada polinom p : ~~1)~~ uvek ima korena u polju F
~~2)~~ nikada nema korena u polju F ~~3)~~ nekada ima a nekada nema korena u polju F ~~4)~~ ništa od prethodnog
31. • Zaokružiti broj (ili brojeve) ispred tvrdjenja koje je tačno u Bulovoj algebri $B = (\{0, 1\}, +, \cdot, ', 0, 1)$:
~~1)~~ $(xy)' = x + y$ ~~2)~~ $(xx')' = (x + 1)'$ ~~3)~~ $x \neq 1 \Rightarrow xy \neq 1$ ~~4)~~ $(x \neq 0 \wedge y \neq 0) \Rightarrow xy \neq 0$
~~5)~~ $xy \neq 0 \Rightarrow (x \neq 0 \wedge y \neq 0)$ ~~6)~~ $x = xy + xy' + x$ ~~7)~~ $xx = x + x$
~~8)~~ $(\forall x \in B)(\exists y \in B) x + y = 1 \wedge xy = 0$
32. • Napisati jedan primer konačnog prstena bez jediice i jedan primer beskonačnog prstena bez jediice.
Konačan: $(\{0, 1\}, +, \cdot)$. Beskonačan: $(\{x \in \mathbb{Z} | x \neq 1\}, +, \cdot)$
33. • Neka je $f \in \mathbb{R}[x]$ i $f(e^{i\pi}) = 0$. Tada važi: ~~1)~~ $x - e^{i\pi} | f(x)$ ~~2)~~ $x - e^{-i\pi} | f(x)$ ~~3)~~ $x^2 + 1 | f(x)$
~~4)~~ $x - 1 | f(x)$ ~~5)~~ $x + 1 | f(x)$ ~~6)~~ $x^2 - 1 | f(x)$
34. • Koje jednakosti su tačne za sve $z \in \mathbb{C}$ i sve $\varphi \in (-\pi, \pi]$ za koje su i definisane: ~~1)~~ $e^{i\varphi} = e^{-i\varphi}$
~~2)~~ $e^{i\varphi} = e^{-i\varphi}$ ~~3)~~ $e^{i(\arg z + \arg(-\bar{z}))} = -1$ ~~4)~~ $e^{i(\arg z + \arg \bar{z})} = 1$ ~~5)~~ $z^{-1} = \bar{z} |z|^{-2}$ ~~6)~~ $|-z| = |\bar{z}|$
~~7)~~ $|\arg(-z)| + |\arg \bar{z}| = \pi$

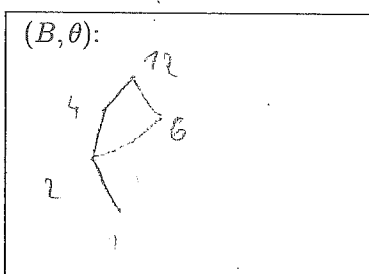
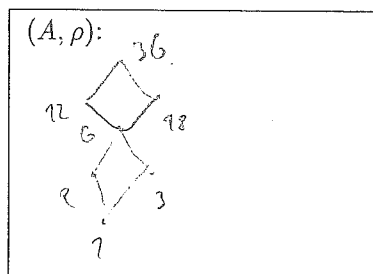
KOLOKVIJUM 1, PRIMER 9

1. • Neka su $f : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ i $g : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ definisane sa $f(x) = e^x - 1$ i $g(x) = \frac{1}{x^2}$. Izračunati:
~~1)~~ $f^{-1}(x) = \ln(x+1)$ ~~2)~~ $g^{-1}(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ ~~3)~~ $(f \circ g)(x) =$ ~~4)~~ $(f \circ g)^{-1}(x) =$ ~~5)~~ $(g^{-1} \circ f^{-1})(x) =$
2. • Bijektivne funkcije su: ~~1)~~ $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+, f(x) = -x^2$ ~~2)~~ $f : [-1, 1] \rightarrow [0, 2\pi], f(x) = \arccos x$
~~3)~~ $f : [-\frac{\pi}{3}, 0] \rightarrow [\frac{1}{2}, 1], f(x) = \cos x$ ~~4)~~ $f : [-3, 0] \rightarrow [0, 9], f(x) = x^2$
~~5)~~ $f : [1, \infty) \rightarrow [0, \infty), f(x) = \ln x^2$
3. • Zaokružiti brojeve ispred tvrdjenja koja su tačna u svakoj Bulovoj algebri $(B, +, \cdot, ', 0, 1)$:
~~1)~~ $(a')'0' = a$ ~~2)~~ $a' + 0' = 1 + 0$ ~~3)~~ $a \cdot 1' = (a')'$ ~~4)~~ $1 + a = a' + 0'$ ~~5)~~ $(ab)' = (a' + b)'$
4. • Skup S svih kompleksnih rešenja jednačine $e^{ix} = 1$ je $S = \{1, e^{2\pi i}, e^{4\pi i}, \dots\}$
5. • Za kompleksni broj $z = e^{i\frac{\pi}{3}} - 1$, naći:
 $Re(z) = \frac{1}{2}$, $Im(z) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $|z| = \sqrt{3}$, $\arg(z) = \frac{\pi}{6}$, $\bar{z} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $z^2 = 3e^{i\frac{\pi}{3}}$
6. • Sledeće kompleksne brojeve napisati u eksponencijalnom obliku, odnosno u obliku $\rho e^{i\varphi}$, $\rho \in [0, \infty)$, $\varphi \in (-\pi, \pi]$:
 $-2 = 2e^{i\pi}$, $9 = 9e^{i0}$, $e^{i\frac{\pi}{3}} - 1 = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}$, $-2i = 2e^{-i\frac{\pi}{2}}$, $5\pi = 5\pi e^{i0}$, $-3\pi + 3\pi i = \sqrt{18}e^{i\frac{\pi}{4}}$
7. • Zaokružiti brojeve ispred struktura koje su grupe. ~~1)~~ $(\{-1, 1\}, \cdot)$ ~~2)~~ $(\{f | f : \mathbb{R} \xrightarrow{1-1} \mathbb{R}\}, \circ)$ ~~3)~~ $(\mathbb{N}, +)$
~~4)~~ $(\{2k | k \in \mathbb{Z}\}, \cdot)$ ~~5)~~ $(\{2k | k \in \mathbb{Z}\}, +)$ ~~6)~~ $(\mathbb{R}[x], \cdot)$ ~~7)~~ $(\{\frac{m}{5} | m \in \mathbb{Z}\}, +)$
8. • Ako su P i $Q \neq -P$ polinomi i $dg(P) = dg(Q) = 1$, tada je
 $dg(PQ) \in \{1\}$ i $dg(P+Q) \in \{0, 1\}$
9. • Za polinome $p(x) = (x-5)^3 x(x-2)^6$ i $q(x) = x^5(x+1)^3(x-5)^2(x-2)^3$ nad poljem realnih brojeva izračunati: $NZD(p, q) = x(x-5)^2(x-2)^3$

10. Neka su $f: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ i $g: (0, \infty) \rightarrow (1, \infty)$ definisane sa $f(x) = \frac{1}{2x}$ i $g(x) = 2x + 1$. Izračunati:
 1) $f^{-1}(x) = \frac{1}{2x}$, 2) $(f \circ g)(x) = \frac{1}{4x+2}$, 3) $(f \circ g): \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$, 4) $(g \circ f): \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

11. Neka je $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $f: A \rightarrow A$ i $g: A \rightarrow A$ funkcije definisane sa $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$. Tada je $f^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $g^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, $g \circ f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$, $f^{-1} \circ g^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$, $(g \circ f)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

12. Neka je ρ relacija „deli” skupa $A = \{1, 2, 3, 6, 12, 18, 36\}$ i neka je θ relacija „deli” skupa $B = \{1, 2, 4, 6, 12\}$. Nacrtati Haseove dijagrame i popuniti tabelu, odnosno staviti / tamo gde traženo ne postoji.



	(A, ρ)	(B, θ)
minimalni	1	1
maksimalni	36	12
najveći	36	12
najmanji	1	1

13. U Bulovoj algebri $B = (B, +, \cdot, ', 0, 1)$ definisana je relacija $f = \{(x, x') | x \in B\}$. Relacija f je:
 1) Refleksivna 2) Simetrična 3) Transitivna 4) Antisimetrična 5) Funkcija
 6) $f: B \rightarrow B$ na 7) $f: B \rightarrow B$ 1-1

14. Za funkciju $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ iz grupe $(\mathbb{R}, +)$ u grupu $(\mathbb{R}, +)$, definisanu sa $f(x) = 7x$, važi:
 1) f je homomorfizam 2) f je izomorfizam 3) f^{-1} postoji i f^{-1} je homomorfizam 4) f^{-1} je izomorfizam

15. Zaokružiti polja nad kojima je polinom $t^3 + t^2 - 1$ svodljiv: $\mathbb{Q}$ $\mathbb{R}$ $\mathbb{C}$ $\mathbb{Z}_2$ $\mathbb{Z}_3$

16. Skup svih mogućih stepena nesvodljivih polinoma nad poljem kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$ je $\{1\}$

17. U prstenu polinoma, za svaki polinom p važi: 1) ako je p jednak proizvodu dva nesvodljiva polinoma, tada je p svodljiv 2) ako je $p = 4$, tada je on svodljiv 3) ako je $p = 3$, tada je on nesvodljiv 4) ako je p nesvodljiv tada je $p \neq 0$ i $dg(p) \neq 0$ i p nije jednak proizvodu dva polinoma stepena većih od 0 5) ako je $p \neq 0$ i $dg(p) \neq 0$ i p je jednak proizvodu dva polinoma stepena manjeg od $dg(p)$, tada je p je svodljiv

18. Neka su $p(x) = x + 2$ i $q(x) = x^2 + 1$ polinomi nad poljem $\mathbb{Z}_5$ i $A = (\mathbb{Z}_7[x]/p, +, \cdot)$ i $B = (\mathbb{Z}_7[x]/q, +, \cdot)$. Tada su polja: a) Samo A b) Samo B c) A i B d) Ni A ni B .

19. Zaokruži brojeve ispred tačnih iskaza. 1) $\arg z > 0 \Leftrightarrow I_m(z) > 0$ 2) $\arg z < 0 \Leftrightarrow I_m(z) < 0$ 3) $\arg z \geq 0 \Rightarrow I_m(z) \geq 0$ 4) $\arg z \geq 0 \Leftrightarrow I_m(z) \geq 0$ 5) $\arg z \notin [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \Rightarrow R_e(z) < 0$

20. U Bulovoj algebri $B = (B, +, \cdot, ', 0, 1)$, broj rešenja sistema jednačina $x + a = 1 \wedge xa = 0$, po nepoznatoj x , u zavisnosti od $a \in B$, može biti (zaokružiti tačna rešenja): 0 1 2 ∞

21. Zaokružiti brojeve ispred struktura koje su asocijativni grupoidi sa neutralnim elementom: 1) $(\{2k | k \in \mathbb{Z}\}, \cdot)$ 2) $(P(\mathbb{N}), \cap)$ 3) $(\{a + ai | a \in \mathbb{R}\}, +)$ 4) $(\mathbb{Z}, \cdot)$ 5) $(\{f | f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}\}, \circ)$

22. Zaokružiti brojeve ispred struktura koja su polja: 1) $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ 2) $(\mathbb{Z}_4, +, \cdot)$ 3) $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ 4) $(\mathbb{Z}_3, +, \cdot)$ 5) $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ 6) $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ 7) $(\mathbb{R}[t], +, \cdot)$ 8) $(\mathbb{R}^+, +, \cdot)$ 9) $(\{f_k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} | f_k(x) = kx, k \in \mathbb{R}\}, +, \cdot)$

23. Neka su z_1, z_2, z_3 kompleksni brojevi. Tada rotacijom tačke z_3 oko tačke z_2 za ugao $-\frac{\pi}{3}$ dobija se tačka $z_1 + (z_2 - z_1)e^{i\frac{\pi}{3}}$, translacijom tačke z_2 za vektor z_3 dobija se tačka $z_2 + z_3$, a $z_2 z_1 z_3 = \frac{(z_2 - z_1)^2}{z_3}$.

24. Navesti geometrijsku interpretaciju sledećih kompleksnih funkcija $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $g: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $h: \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ i $s: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, kao i odgovoriti na pitanje injektivnosti i surjektivnosti funkcija f, g, h i s .

$f(z) = ze^{-i\frac{\pi}{4}}$ je rotacija za $-\frac{\pi}{4}$ bijectivna

$g(z) = |z|e^{i\arg z} \wedge g(0) = 0$ je simetrija u odnosu na realnu osu bijectivna

$h(z) = e^{i\arg |z|} \wedge h(0) = 1$ je projekcija u tačku 1 ni ni

$s(z) = \bar{z} \cdot (\cos \frac{\pi}{5} - i \sin \frac{\pi}{5})$ je od simetrije oko prave koja prolazi kroz početak i zadržava $\frac{-\pi}{5}$ na pozitivnom delu realne ose bijectivna

44. • Neka je $\{-1, 0, 1\}$ skup svih korena polinoma $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, gde su $a, b, c \in \mathbb{R}$. Tada je
 $a \in \{ \quad 0 \quad \}, \quad b \in \{ \quad -7 \quad \} \quad c \in \{ \quad 0 \quad \}$
45. • Neka je $A = \{4, 7\}$ i $B = \{1, 2, 5\}$. Odrediti broj elemenata sledećih skupova funkcija ako $f \nearrow$ označava rastuću funkciju f i $f \searrow$ označava neopadajuću funkciju f :
 $|\{f|f: A \rightarrow B\}| = \underline{2} \quad |\{f|f: A \xrightarrow{1-1} B\}| = \underline{6} \quad |\{f|f: A \rightarrow B \wedge f \nearrow\}| = \underline{2} \quad |\{f|f: B \xrightarrow{na} B\}| = \underline{6}$
 $|\{f|f: B \rightarrow A\}| = \underline{2} \quad |\{f|f: A \rightarrow A \wedge f \nearrow\}| = \underline{1} \quad |\{f|f: B \rightarrow A \wedge f \searrow\}| = \underline{4} \quad |\{f|f: A \xrightarrow{na} B\}| = \underline{0}$
46. • U skupu kompleksnih brojeva je: ~~1)~~ $\sqrt{z\bar{z}} = |z|$ ~~2)~~ $z = e^{i\frac{\pi}{7}} \Rightarrow z^{-1} = \bar{z}$ ~~3)~~ $|z_1 z_2| = |z_2| |z_1|$
~~4)~~ $R_e(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$ ~~5)~~ $\bar{z}_1 - \bar{z}_2 = \overline{z_2 - z_1}$ ~~6)~~ $|z| = 1 \Leftrightarrow z^{-2} = \bar{z}^2$ ~~7)~~ $|-z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2|$
~~8)~~ $|z_1| |z_2| = |z_2| |z_1| \Rightarrow \arg z_1 = \arg z_2$
47. • Ako je $P(x) = ax^3 + c$ polinom nad poljem realnih brojeva i ako je $c \neq 0$, tada stepen $dg(P)$ polinoma P je: ~~1)~~ $dg(P) = 3$, ~~2)~~ $dg(P) \in \{0, 1, 3\}$, ~~3)~~ $dg(P) \in \{1, 3\}$, ~~4)~~ $dg(P) \in \{0, 1, 3\}$, ~~5)~~ $dg(P) \in \{0, 3\}$
48. • Zaokružiti brojeve ispred struktura koje su domeni integriteta: ~~1)~~ $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ~~2)~~ $(\{9k|k \in \mathbb{Z}\}, +, \cdot)$
~~3)~~ $(\mathbb{Z}_9, +, \cdot)$ ~~4)~~ $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ ~~5)~~ $(\mathbb{Z}_3, +, \cdot)$ ~~6)~~ $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ ~~7)~~ $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ ~~8)~~ $(\mathbb{R}[t], +, \cdot)$ ~~9)~~ $(\mathbb{R}^+, +, \cdot)$
49. • Ako je p nesvodljiv polinom stepena 4 nad nekim poljem F , tada polinom p : ~~1)~~ uvek ima korena u polju F ~~2)~~ nikada nema korena u polju F ~~3)~~ nekada ima a nekada nema korena u polju F ~~4)~~ ništa od prethodnog
50. • Napisati primere dva konačna prstena i dva primera beskonačnih prstena koji nisu polja.
Konačni: $(\{0\}, +, \cdot)$, $(\mathbb{Z}_5, +, \cdot)$. Beskonačni: $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$, $(\mathbb{R}_{10}, +, \cdot)$
51. • Neka je $f \in \mathbb{R}[x]$ i $f(e^{-i\frac{\pi}{12}}) = 0$. Zaokruži tačno: ~~a)~~ $x - e^{-i\frac{\pi}{12}} \mid f(x)$ ~~b)~~ $x + e^{i\frac{\pi}{12}} \mid f(x)$ ~~c)~~ $x - e^{i\frac{\pi}{12}} \mid g f(x)$
~~d)~~ $x^2 - x\sqrt{2 - \sqrt{3}} + 1 \mid f(x)$ ~~e)~~ $x^2 - x\sqrt{2 + \sqrt{3}} + 1 \mid f(x)$ ~~f)~~ $x^2 - 2x\sqrt{2 + \sqrt{3}} + 1 \mid f(x)$
52. • Koje jednakosti su tačne za sve $z \in \mathbb{C}$ i sve $\varphi \in (-\pi, \pi]$ za koje su i definisane: ~~1)~~ $e^{-i\varphi} = e^{-i\bar{\varphi}}$
~~2)~~ $e^{-i\varphi} = e^{-i\varphi}$ ~~3)~~ $e^{i(\arg z - \arg(-z))} = -1$ ~~4)~~ $e^{i(\arg z + \arg(-z))} = 1$ ~~5)~~ $1 = z\bar{z}|z|^{-2}$
~~6)~~ $\arg z > 0 \Rightarrow \arg z - \arg(-z) = \pi$

KOLOKVIJUM 1, PRIMER 10

1. • Iza oznake svake od datih relacija u skupu $\mathbb{R}$ zaokružiti samo ona slova koja označavaju svojstvo relacije koju ona poseduje: R- refleksivnost S- simetričnost A- antisimetričnost T- tranzitivnost F- funkcija.
 $\triangleright$: R S ~~A~~ ~~T~~ F $\rho = \{(-1, -1), (0, 0), (1, 1)\} : \mathbb{R} \text{ S A T F}$
2. • Neka su $f: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ i $g: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ definisane sa $f(x) = \frac{1}{2x}$ i $g(x) = 2^x - 1$. Izračunati:
1) $f^{-1}(x) = \frac{1}{2x}$ 2) $g^{-1}(x) = \log_2(x+1)$
3) $(f \circ g)(x) = \frac{1}{2(2^x - 1)}$ 4) $(f \circ g)^{-1}(x) = \log_2(\frac{1}{2x} + 1)$ 5) $(g^{-1} \circ f^{-1})(x) = \log_2(\frac{1}{2x} + 1)$
3. • Zaokružiti brojeve ispred bijektivnih funkcija:
1) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 3 - x$ 2) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$ 3) $f: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty), f(x) = x^2$
4) $f: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty), f(x) = x^2$ 5) $f: (0, \frac{\pi}{2}) \rightarrow (0, \infty), f(x) = \tan x$ 6) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = e^x$
4. • Zaokružiti brojeve ispred tvrdjenja koja su tačna u svakoj Bulovoj algebri $(B, +, \cdot, ', 0, 1)$:
~~1)~~ $(a')' = a'$ ~~2)~~ $a + a' = 0$ ~~3)~~ $a \cdot 0 = 0$ ~~4)~~ $1 + a = a$ ~~5)~~ $(a + b)' = a' + b'$
5. • Skup kompleksnih rešenja jednačine $x^2 = -1$ je $S = \{ \quad -i, i \quad \}$.
6. • Odrediti realni i imaginarni deo, moduo, argument, i konjugovani broj kompleksnog broja $z = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$:
 $Re(z) = -\frac{1}{2}$, $Im(z) = -\frac{1}{2}$, $|z| = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\arg(z) = -\frac{3\pi}{4}$, $\bar{z} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$.

7. ● Sledeće kompleksne brojeve napisati u algebarskom obliku:

$$e^{i\pi} = -1, \quad 2e^{i\frac{\pi}{2}} = 2i, \quad 2e^{0 \cdot i} = 2$$

8. ● Zaokružiti broj (ili brojeve) ispred struktura koje su komutativne grupe.

- 1) $(\mathbb{N}, +)$ 2) $(\mathbb{N}, \cdot)$ 3) $(\mathbb{R}, +)$ 4) $(\mathbb{R}, \cdot)$ 5) $((0, \infty), +)$ 6) $((0, \infty), \cdot)$

9. ● Neka su $P = (a_0, a_1, \dots, a_4)$ i $Q = (b_0, b_1, \dots, b_3)$ polinomi. Tada je

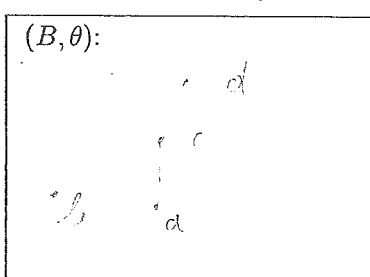
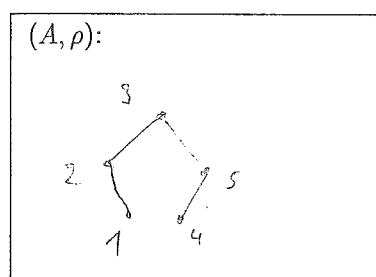
$$dg(P+Q) = 4 \text{ i } dg(PQ) = 7$$

10. ● Napisati jednu relaciju skupa $A = \{1, 2, 3\}$ koja je refleksivna, simetrična, antisimetrična i tranzitivna:

$$\rho = \{ (1,1), (2,2), (3,3) \}$$

11. ● Broj svih antisimetričnih relacija skupa $A = \{1, 2\}$ je: 12

12. ● Neka je $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $\rho = \{(x, x) | x \in A\} \cup \{(1, 2), (1, 3), (2, 3), (4, 5), (4, 3), (5, 3)\}$,
 $B = \{a, b, c, d\}$ i $\theta = \{(x, x) | x \in B\} \cup \{(a, c), (a, d), (c, d)\}$. Nacrtati Haseove dijagrame i popuniti tabelu, odnosno staviti / tamo gde traženo ne postoji.



	(A, ρ)	(B, θ)
minimalni	1, 4	a, b
maksimalni	3	d, c
najveći	3	/
najmanji	/	/

13. ● U skupu $\mathbb{C}$ date su relacije: $\rho_1 = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid |z| = |w|\}$, $\rho_2 = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid z \cdot w = 0\}$,
 $\rho_3 = \{(0, 0)\} \cup \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid \arg(z) = \arg(w)\}$, $\rho_4 = \{(0, 0)\} \cup \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid z \cdot w = 1\}$,
 $\rho_5 = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid R_e(z) = I_m(w)\}$, $\rho_6 = \mathbb{C}^2$

Iza oznake svake od tih relacija zaokružiti samo ona slova koja označavaju svojstvo relacije koju ona poseduje: R- refleksivnost S- simetričnost A- antisimetričnost T- tranzitivnost F- funkcija.

$$\rho_1: \text{R S A T F} \quad \rho_2: \text{R S A T F} \quad \rho_3: \text{R S A T F} \quad \rho_4: \text{R S A T F} \quad \rho_5: \text{R S A T F} \quad \rho_6: \text{R S A T F}$$

14. ● Ako je $f: A \rightarrow B$ surjektivna funkcija i $b \in B$, tada broj rešenja po $x \in A$ jednačine $f(x) = b$ može biti (zaokruži) 0 1 2 3 ∞

15. ● Ako je $f: A \rightarrow B$ injektivna funkcija i $b \in B$, tada broj rešenja po $x \in A$ jednačine $f(x) = b$ može biti (zaokruži) 0 1 2 3 ∞

16. ● Naći najveći podskup A skupa $\mathbb{R}$ i najmanji podskup B skupa $\mathbb{R}$ tako da je izrazom $f(x) = \ln(x^2 - 4)$ dobro definisana funkcija $f: A \rightarrow B$. Tada je $A = (-2, 2) \cup (2, \infty)$ i $B = \mathbb{R}$. Funkcija $f: A \rightarrow B$ je: 1) surjektivna i injektivna 2) ni surjektivna ni injektivna 3) surjektivna ali nije injektivna 4) nije surjektivna a jeste injektivna

17. ● Zaokružiti broj (ili brojeve) ispred tvrđenja koje je tačno u Bulovoj algebri $B = (B, +, \cdot, ', 0, 1)$.

- 1) $xx = x + x$ 2) $xy = x + y$ 3) $xy = (x + y)'$ 4) $xy = 0 \Rightarrow (x = 0 \vee y = 0)$
5) $(x = 0 \vee y = 0) \Rightarrow xy = 0$ 6) $x = xy + xy'$ 7) $(\forall x \in B)(\exists y \in B) x + y = 1 \wedge xy = 0$

18. ● U Bulovoj algebri $B = (B, +, \cdot, ', 0, 1)$, broj rešenja sistema jednačina $x + a = 1 \wedge xa = 0$, po nepoznatoj x , u zavisnosti od $a \in B$, može biti (zaokružiti tačna rešenja): 0 1 2 ∞

19. ● Zaokružiti brojeve ispred struktura koje su asocijativni grupoidi sa neutralnim elementom:

- 1) $(\{2k \mid k \in \mathbb{Z}\}, \cdot)$ 2) $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \cap)$ 3) $(\{a + ai \mid a \in \mathbb{R}\}, +)$ 4) $(\mathbb{Z}, \cdot)$ 5) $(\{f \mid f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}\}, \circ)$

20. ● Zaokružiti slova (ili slovo) ispred struktura koje su prsteni a nisu polja: 1) $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ 2) $(\mathbb{Z}_4, +, \cdot)$

- 3) $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ 4) $(\mathbb{Z}_3, +, \cdot)$ 5) $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ 6) $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ 7) $(\mathbb{R}[t], +, \cdot)$ 8) $(\mathbb{R}^+, +, \cdot)$

11. Zaokružiti homomorfizme $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_2$ iz grupe $(\mathbb{Z}, +)$ u grupu $(\mathbb{Z}_2, +)$: (1) $\forall x \in \mathbb{Z}, f(x) = 0$
 2) $\forall x \in \mathbb{Z}, f(x) = 1$ (3) $f(x) = \begin{cases} 0 & x \text{ je paran broj} \\ 1 & x \text{ je neparan broj} \end{cases}$ 4) $f(x) = \begin{cases} 0 & x \text{ je neparan broj} \\ 1 & x \text{ je paran broj} \end{cases}$
12. Ako je $z_1 = -1 - \sqrt{3}i$, $z_2 = 1 - i$, tada je $z_1 + z_2 = -1 - \sqrt{3}i + 1 - i = -\sqrt{3}i - i = -(\sqrt{3}+1)i$
 $\frac{z_1}{z_2} = \frac{-1-\sqrt{3}i}{1-i} = \frac{(-1-\sqrt{3}i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{-1-\sqrt{3}i-1-\sqrt{3}i}{2} = \frac{-2-2\sqrt{3}i}{2} = -1-\sqrt{3}i$
 $\arg(z_1) = -\frac{2\pi}{3}$ $\arg(z_2) = -\frac{\pi}{4}$ $\arg(z_1 z_2) = -\frac{3\pi}{4}$ $\arg(\frac{z_1}{z_2}) = -\frac{5\pi}{4}$
13. Zaokružiti brojeve za koje je prsten $(\mathbb{Z}_3[t]/P, +, \cdot)$ polje:
 1) $P(t) = t + 2$ (2) $P(t) = t^2 + 1$ 3) $P(t) = t^2 + t + 1$ 4) $P(t) = t^3 + t + 1$ 5) $P(t) = t^{2005} + 1$
14. Pri deljenju polinoma $t^5 + t + 1$ polinomom $t^2 + t + 1$ nad poljem $\mathbb{Z}_7$ dobija se količnik $t^3 + 6t^2 + 6t + 6$
 i ostatak 0 . Da li dobijeni rezultat važi nad proizvoljnim poljem? DA (NE)
15. Skup svih stepena nesvodljivih polinoma nad poljem $\mathbb{R}$ je $\{1, 2\}$, a nad poljem $\mathbb{C}$ je $\{1\}$.
16. Navesti geometrijsku interpretaciju skupova A, B, C, D i sledećih kompleksnih funkcija $f, g: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, kao i odgovoriti na pitanje injektivnosti i surjektivnosti funkcija f i g .
 $f(z) = z \cdot (-i)$ je rotacija za $-\frac{\pi}{2}$
 $g(z) = -\bar{z}$ je zrcaljenje u imaginarnu osu
 $A = \{z | z^2 = \bar{z} \wedge z \neq 0\}$ je jednačina jednog trougla sa temenima u koordinatama
 $B = \{z | |z| = |\bar{z}|\}$ je cela kompleksna ravnina
 $C = \{z | \frac{z+\bar{z}}{2} = \frac{z-\bar{z}}{2i}\}$ je prava $y = x$
 $D = \{z | |z| \leq 2 \wedge 0 \leq \arg z \leq \pi\}$ je gornje polukružje (koje ima centar u 0 i radijus 2)
17. U Bulovoj algebri $B = (B, +, \cdot, ', 0, 1)$ definisana je relacija $f = \{(x', x) | x \in B\}$. Relacija f je:
 1) Refleksivna (2) Simetrična 3) Tranzitivna 4) Antisimetrična 5) Funkcija (6) $f: B \rightarrow B$
 (7) $f: B \rightarrow B$
18. Neka su z_1, z_2, z_3 kompleksni brojevi. Tada rotacijom tačke z_1 oko tačke z_3 za ugao $-\frac{\pi}{2}$ dobija se tačka $z_3 + (z_1 - z_3)e^{-i\frac{\pi}{2}}$, translacijom tačke z_2 za vektor z_1 dobija se tačka $z_2 + z_1$, a $z_2 z_1 z_3 = z_2 z_1 z_3$
19. Neka je $A = \{4, 7, 5\}$ i $B = \{1, 2\}$. Odrediti broj elemenata sledećih skupova funkcija ako $f \nearrow$ označava rastuću funkciju f i $f \searrow$ označava neopadajuću funkciju f :
 $|\{f | f: A \rightarrow B\}| = 2$ $|\{f | f: A \xrightarrow{1-1} B\}| = 0$ $|\{f | f: A \rightarrow B \wedge f \nearrow\}| = 0$ $|\{f | f: B \xrightarrow{na} A\}| = 2$
 $|\{f | f: B \rightarrow A\}| = 2$ $|\{f | f: A \rightarrow A \wedge f \nearrow\}| = 1$ $|\{f | f: B \rightarrow A \wedge f \searrow\}| = 6$ $|\{f | f: A \xrightarrow{na} B\}| = 4$
20. U skupu kompleksnih brojeva je: 1) $\sqrt{z\bar{z}} = |z|$ (2) $z = e^{i\frac{\pi}{7}} \Rightarrow z^{-1} = \bar{z}$ (3) $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$
 4) $R_e(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$ 5) $\frac{z_1 - z_2}{2} = \bar{z}_2 - \bar{z}_1$ 6) $|z| = 1 \Leftrightarrow z^{-2} = \bar{z}^2$ 7) $|-z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2|$
 8) $z_1 |z_2| = z_2 |z_1| \Rightarrow \arg z_1 = \arg z_2$

KOLOKVIJUM 1, PRIMER 11

1. Iza oznake svake od datih relacija u skupu $\mathbb{R}$ zaokružiti samo ona slova koja označavaju svojstvo relacije koju ona poseduje: R- refleksivnost S- simetričnost A- antisimetričnost T- tranzitivnost F- funkcija.
 $\geq: \text{R} \text{S} \text{A} \text{T} \text{F}$ $\rho = \{(x, x) | x \in \mathbb{R}\}: \text{R} \text{S} \text{A} \text{T} \text{F}$ $\rho = \{(1, 2), (1, 3)\}: \text{R} \text{S} \text{A} \text{T} \text{F}$
2. Neka su $f: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ i $g: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ definisane sa $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ i $g(x) = \ln(\sqrt{x} + 1)$. Izračunati:
 1) $f^{-1}(x) = \frac{1}{x^2}$ 2) $g^{-1}(x) = e^{x^2} - 1$ 3) $(f \circ g)(x) = \frac{1}{\sqrt{e^{x^2} - 1}}$ 4) $(f \circ g)^{-1}(x) = \sqrt{e^{x^2} - 1}$ 5) $(g^{-1} \circ f^{-1})(x) = e^{\frac{1}{x^2}} - 1$
3. Neka su f i g funkcije definisane sa $f = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ c & d & a & b \end{pmatrix}$, $g = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \end{pmatrix}$ i $h = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ d & c & b & a \end{pmatrix}$. Tada je $f \circ g = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ c & d & a & b \end{pmatrix}$,
 $f^{-1} = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ c & d & a & b \end{pmatrix}$, $g^{-1} = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \end{pmatrix}$, $(f \circ g)^{-1} = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ c & d & a & b \end{pmatrix}$, $g^{-1} \circ f^{-1} = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \end{pmatrix}$
4. Zaokružiti broj (ili brojeve) ispred tvrdjenja koja su tačna u Bulovoj algebri:
 1) $ab + bc + ac + a = (a + b)(a + c)$ (2) $a' + a' = a'$ 3) $a + a' = 0$ 4) $a \cdot 0 = 0$ 5) $1 \cdot 0 = 1$ (6) $a + 1 = 1$

5. ☒ U grupi $(\mathbb{Z}_5 \setminus \{0\}, \cdot)$ neutralni element je 1, a inverzni elementi su:

$$2^{-1} = \underline{3}, 3^{-1} = \underline{2}, 4^{-1} = \underline{4},$$

6. ☒ Za kompleksne brojeve $z_1 = (1+i)^2$ i $z_2 = 1+i^3$ izračunati

$$z_1 + z_2 = \underline{1+i}, \quad z_1 \cdot z_2 = \underline{-2i}, \quad \frac{z_1}{z_2} = \underline{-1-i}, \quad \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \underline{\frac{3\pi}{4}}, \quad |z_1 + z_2| = \underline{\sqrt{2}}$$

7. ☒ Pri deljenju polinoma $x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ sa $x - 1$ nad $\mathbb{R}$, količnik je $x^2 - 2x + 1$, a ostatak je 0.

8. ☒ Zaokružiti slova (ili slovo) ispred struktura koje su asocijativni i komutativni grupoidi sa neutralnim elementom.

☒ 1) $(\mathbb{Z}, \cdot)$ ☒ 2) $(\{-1, 0, 1\}, +)$ ☒ 3) $(\mathbb{N}, \cdot)$ ☒ 4) $(\mathbb{N} \cup \{0\}, +)$ ☒ 5) $(\mathbb{C}, +)$ ☒ 6) $(\mathbb{Q}, \cdot)$ ☒ 7) $(\{-1, 0, 1\}, \cdot)$

9. ☒ Napisati jednu relaciju ρ skupa $A = \{1, 2, 3\}$ koja nije refleksivna, nije simetrična, nije antisimetrična nije tranzitivna i nije funkcija: $\rho = \{ \}$

10. ☒ Napisati jednu relaciju ρ skupa $A = \{1, 2, 3\}$ koja je refleksivna, simetrična, antisimetrična tranzitivna i funkcija: $\rho = \{ (1,1), (2,2), (3,3) \}$

11. ☒ Broj svih antisimetričnih relacija skupa $A = \{1, 2\}$ je: 7

12. ☒ U Bulovoj algebri $B = (B, +, \cdot, ', 0, 1)$ važi:

☒ a) $x + y = (x'y)'$ ☒ b) $xy = (x' + y')'$
☒ c) $xy = 1 \Rightarrow x = 1$ ☒ d) $x = y \Rightarrow x' = y'$ ☒ e) $x' = y' \Rightarrow x = y$ ☒ f) $f(x) = x' \Rightarrow f : B \xrightarrow{1-1} B$

13. ☒ Za funkciju $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ iz grupe $((0, \infty), \cdot)$ u grupu $(\mathbb{R}, +)$, definisanu sa $f(x) = \ln x$, važi: ☒ 1) f je homomorfizam ☒ 2) f je izomorfizam ☒ 3) f^{-1} postoji i f^{-1} je homomorfizam ☒ 4) f^{-1} postoji i f^{-1} je izomorfizam ☒ 5) ništa od prethodno navedenog

14. ☒ Zaokružiti podgrupe grupe $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$: ☒ 1) $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, +)$ ☒ 2) $((0, \infty), \cdot)$ ☒ 3) $((-\infty, 0), \cdot)$
☒ 4) $(\mathbb{N}, \cdot)$ ☒ 5) $(\mathbb{Z} \setminus \{0\}, \cdot)$ ☒ 6) $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, +)$ ☒ 7) $((0, 1), \cdot)$ ☒ 8) $(\{-1, 1\}, \cdot)$

15. ☒ Da li su sledeći uređeni parovi asocijativni grupoidi sa neutralnim elementom:

☒ a) $(\mathbb{N}, +)$ ☒ b) $(\mathbb{N}, \cdot)$ ☒ c) $(\mathbb{N}, -)$ ☒ d) $(\mathbb{Z}, -)$ ☒ e) $(\mathbb{Z}, \cdot)$ ☒ f) $(\mathbb{Z} \setminus \{0\}, \cdot)$ ☒ g) $(\mathbb{R}, \cdot)$ ☒ h) $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$

16. ☒ Ako je $f : G \rightarrow H$ izomorfizam grupoda $(G, +)$ sa neutralnim elementom 0 u grupoid $(H, \cdot)$ sa neutralnim elementom 1, tada je: ☒ 1) $f(0) = 1$ ☒ 2) $f(-a) = a^{-1}$ ☒ 3) $f(x \cdot y) = f(x) + f(y)$

17. ☒ Navesti dva primera domena integriteta koji nisu polja: $(\mathbb{F}_p[x], +, \cdot)$, $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$

18. ☒ U polju $\mathbb{Z}_7$ izračunati $(3^2)^{-1} + 2^{-1} \cdot 3 = \underline{2}$

19. ☒ U polju $\mathbb{Z}_5$, skup rešenja po $x \in \mathbb{Z}_5$ jednačine $3 + 4(x^{-1} + 2x^2) = x$ je $\{1, 2\}$

20. ☒ Ako je $|z| = 1$ tada je: ☒ 1) $z = \bar{z}$ ☒ 2) $\arg z = \arg \bar{z}$ ☒ 3) $z^{-1} = z$ ☒ 4) $|z| = |\bar{z}|$ ☒ 5) $z^{-1} = \bar{z}$ ☒ 6) $|\arg z| = |\arg \bar{z}|$

21. ☒ ☒ 1) $-\frac{\pi}{2} \leq \arg z \leq \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow (I_m(z) \geq 0 \wedge z \neq 0)$ ☒ 2) $-\frac{\pi}{2} \leq \arg z \leq \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow (R_e(z) \geq 0 \wedge z \neq 0)$

☒ 3) $|z| > 0 \Rightarrow |\arg(z)| = |\arg(\bar{z})|$ ☒ 4) $\sqrt{z\bar{z}} = |z|$, gde je $\sqrt{\quad}$ realni koren

22. ☒ $\arg(e^{i\frac{\pi}{3}} + e^{-i\frac{\pi}{3}}) = \underline{0}$, $|e^{i\frac{\pi}{3}} + e^{-i\frac{\pi}{3}}| = \underline{2}$, $R_e(e^{i\frac{\pi}{3}} + e^{-i\frac{\pi}{3}}) = \underline{2}$, $I_m(e^{i\frac{\pi}{3}} + e^{-i\frac{\pi}{3}}) = \underline{0}$

23. ☒ Zaokružiti polja nad kojima je polinom $t^2 + t + 1$ svodljiv: ☒ $\mathbb{Q}$ ☒ $\mathbb{R}$ ☒ $\mathbb{C}$ ☒ $\mathbb{Z}_2$ ☒ $\mathbb{Z}_3$

24. ☒ Skup svih mogućih stepena svodljivih polinoma nad poljem realnih brojeva $\mathbb{R}$ je $\{1, 2, 3, \dots\}$

25. ☒ U prstenu polinoma, za svaki polinom p važi: ☒ 1) ako je p jednak proizvodu dva polinoma, tada je p svodljiv ☒ 2) ako je $p = 0$, tada je on svodljiv ☒ 3) ako je $p = 0$, tada je on nesvodljiv ☒ 4) ako je p svodljiv tada je $p \neq 0$ i $dg(p) \neq 0$ i p je jednak proizvodu dva polinoma stepena većeg od 0 ☒ 5) ako je $p \neq 0$ i $dg(p) \neq 0$ i p je jednak proizvodu dva polinoma stepena većeg od 0, tada je p je svodljiv

26. • Neka su $p(x) = 2x + 1$ i $q(x) = x^2 + 2$ polinomi nad poljem $\mathbb{Z}_5$ i $\mathcal{A} = (\mathbb{Z}_5[x]/p, +, \cdot)$ i $\mathcal{B} = (\mathbb{Z}_5[x]/q, +, \cdot)$. Tada su polja: a) Samo $\mathcal{A}$ b) Samo $\mathcal{B}$ c) $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ d) Ni $\mathcal{A}$ ni $\mathcal{B}$.
27. • U skupu kompleksnih brojeva je: 1) $\sqrt{z\bar{z}} = |z|$ 2) $z = e^{i\frac{\pi}{7}} \Rightarrow z^{-1} = \bar{z}$ 3) $|z_1 z_2| = |z_2| |z_1|$ 4) $R_e(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$ 5) $\frac{z_1 - z_2}{z_1 - \bar{z}_2} = \bar{z}_2 - \bar{z}_1$ 6) $|z| = 1 \Leftrightarrow z^{-2} = \bar{z}^2$ 7) $|-z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ 8) $z_1 |z_2| = z_2 |z_1| \Rightarrow \arg z_1 = \arg z_2$
28. • Neka su $z_1 = 2 + 2i$, $z_2 = -3 - i$ i $z_3 = -1 - i$. Izraziti u zavisnosti od z_1 , z_2 i z_3 ugao $\angle z_2 z_3 z_1 = \frac{3\pi}{4}$ i zatim ga efektivno izračunati $\angle z_2 z_3 z_1 = \frac{3\pi}{4}$. Da li je ovaj ugao pozitivno orijentisan? DA NE
29. • Napisati bar jedan polinom nad poljem racionalnih brojeva $\mathbb{Q}$ koji je nesvodljiv i koji je stepena: a) 1 $x - 1$ b) 2 $x^2 + 1$
30. • Ako je p svodljiv polinom nad poljem $\mathbb{Q}$, tada skup svih mogućih vrednosti za $dg(p)$ je $\{1, 2, 3, \dots\}$
31. • Odrediti sve vrednosti parametara $a, b \in \mathbb{Q}$ za koje je polinom $p(x) = ax + b$ nesvodljiv nad poljem $\mathbb{Q}$: $b \in \mathbb{Q} \wedge a \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$
32. • Neka je $\{1\}$ skup svih korena polinoma $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, gde su $a, b, c \in \mathbb{R}$. Tada skup svih mogućnosti za a je $a \in \{-3\}$, skup svih mogućnosti za b je $b \in \{3\}$ i skup svih mogućnosti za c je $c \in \{-1\}$.
33. • Neka je $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ i $B = \{1, 2\}$. Odrediti broj elemenata sledećih skupova funkcija ako $f \nearrow$ označava rastuću funkciju f i $f \searrow$ označava neopadajuću funkciju f :
 $|\{f|f: A \rightarrow B\}| = 32$ $|\{f|f: A \xrightarrow{1-1} B\}| = 0$ $|\{f|f: A \rightarrow B \wedge f \nearrow\}| = 0$ $|\{f|f: B \xrightarrow{na} B\}| = 2$
 $|\{f|f: B \rightarrow A\}| = 2$ $|\{f|f: A \rightarrow A \wedge f \nearrow\}| = 1$ $|\{f|f: B \rightarrow A \wedge f \searrow\}| = 0$ $|\{f|f: A \xrightarrow{na} B\}| = 2$
34. • Ako je $f \in \mathbb{R}[x]$, $f(e^{-i\alpha}) = 0$ i $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$, tada je: 1) $x - e^{-i\alpha} | f(x)$ 2) $x - e^{i\alpha} | f(x)$ 3) $x - e^{i|\alpha|} | f(x)$ 4) $x^2 - 2x \cos \alpha + 1 | f(x)$ 5) $x^2 - x \cos \alpha + 1 | f(x)$ 6) $x^2 + x \cos \alpha + 1 | f(x)$ 7) $x^2 - x \cos \alpha + \alpha^2 | f(x)$
35. • Ako je $f \in \mathbb{R}[x]$, $f(e^{-i\alpha}) = 0$ i $\alpha \in \mathbb{R}$, tada je: 1) $x - e^{-i\alpha} | f(x)$ 2) $x - e^{i\alpha} | f(x)$ 3) $x - e^{i|\alpha|} | f(x)$ 4) $x^2 - 2x \cos \alpha + 1 | f(x)$ 5) $x^2 - x \cos \alpha + 1 | f(x)$ 6) $x^2 + x \cos \alpha + 1 | f(x)$ 7) $x^2 - x \cos \alpha + \alpha^2 | f(x)$
36. • Ako je $z_1 \neq w$, $z_2 \neq w$, $z_1 \neq 0$ i $z_2 \neq 0$, tada je:
 1) $\arg z_1 = \arg z_2 \Leftrightarrow \frac{z_1}{|z_1|} = \frac{z_2}{|z_2|} \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{R}^+) \vec{Oz_1} = k \vec{Oz_2}$
 2) $\arg(z_1 - w) = \arg(z_2 - w) \Leftrightarrow \frac{z_1 - w}{|z_1 - w|} = \frac{z_2 - w}{|z_2 - w|}$
 3) Množenjem kompleksnog broja s realnim pozitivnim brojem argument se ne menja.
 4) $(\exists k \in \mathbb{R}^+) \vec{wz_1} = k \vec{wz_2} \Leftrightarrow \arg(z_1 - w) = \arg(z_2 - w)$
 5) $(\exists k \in \mathbb{R}^+) \vec{wz_1} = k \vec{wz_2} \Leftrightarrow \frac{z_1 - w}{|z_1 - w|} = \frac{z_2 - w}{|z_2 - w|}$
 6) Kompleksni brojevi koji pripadaju istoj polupravoj koja ishodi iz koordinatnog početka imaju jednake argumente.
 7) Množenje kompleksnog broja z realnim brojem k je homotetija sa centrom $O(0,0)$ i koeficijentom k odnosno $H_{O,k}(z)$.
37. • Funkcija $f: (\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{4}) \setminus \{\frac{\pi}{2}\} \rightarrow \mathbb{R}$ definisana sa $f(x) = \tan x$ je: 1) injektivna i nije surjektivna 2) surjektivna i nije injektivna 3) bijektivna 4) nije injektivna i nije surjektivna
38. • Funkcija $f: (\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}) \rightarrow (0, 1)$ definisana sa $f(x) = \sin x$ je: 1) injektivna i nije surjektivna 2) surjektivna i nije injektivna 3) bijektivna 4) nije injektivna i nije surjektivna

KOLOKVIJUM 1, PRIMER 12

1. • Pri deljenju polinoma $x^3 - x^2 - x + 1$ sa $x + 1$ nad $\mathbb{R}$, količnik je $x^2 - 2x + 1$, a ostatak je 0 .

2. Zaokružiti brojeve ispred tvrdjenja koja su tačna u svakoj Bulovoj algebri $(B, +, \cdot, ', 0, 1)$:

- 1) $(a')' = a' \cdot a'$ 2) $a \cdot a' = 0$ 3) $a \cdot 1' = 1'$ 4) $1 + a' = 0'$ 5) $a' \cdot b' = (a' + b')'$

3. Odrediti realni i imaginarni deo, moduo, argument, i konjugovani broj kompleksnog broja $z = -\sqrt{2} - i\sqrt{6}$:

$Re(z) = -\sqrt{2}$, $Im(z) = -\sqrt{6}$, $|z| = \sqrt{8}$, $\arg(z) = -\frac{3\pi}{4}$, $\bar{z} = -\sqrt{2} + i\sqrt{6}$

4. Za $\subseteq$ u skupu $A = \{A, B, C, D, E\}$, gde je

$A = \{a, b, c\}, B = \{a, b, c, d\}, C = \{a, b\}, D = \{a, b, c, e\}, E = \{a, c\}$

odrediti

najmanji el:

minimalne el:

najveći el:

maksimalne el:

B, D

5. Sledeće kompleksne brojeve napisati u algebarskom obliku:

$2e^{-2\pi i} = 2$, $e^{-3\pi i} = -1$, $2e^{-i\frac{3\pi}{2}} = -2i$, $e^{5\pi i} = -1$, $e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i$

6. Zaokružiti brojeve ispred surjektivnih funkcija:

- 1) $f: [-1, \infty) \rightarrow [-1, \infty)$, $f(x) = x^3$ 2) $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$ 3) $f: (-\infty, 0] \rightarrow [0, \infty)$, $f(x) = x^2$
4) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ 5) $f: (-\infty, 1) \rightarrow (0, \infty)$, $f(x) = e^{-x}$ 6) $f: (\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{4}) \rightarrow (-1, 1)$, $f(x) = \sin x$

7. Zaokružiti brojeve ispred injektivnih funkcija:

- 1) $f: [-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$ 2) $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$ 3) $f: (-\infty, 0] \rightarrow [0, \infty)$, $f(x) = x^2$
4) $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ 5) $f: (-\infty, 1) \rightarrow (0, \infty)$, $f(x) = e^{-x}$ 6) $f: (\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{4}) \rightarrow (-1, 1)$, $f(x) = \sin x$

8. Zaokružiti brojeve ispred struktura koje su komutativni grupoidi sa neutralnim elementom i nisu grupe.

- 1) $(\mathbb{N}, +)$ 2) $(\mathbb{N}, \cdot)$ 3) $(\mathbb{R}, +)$ 4) $(\mathbb{R}, \cdot)$ 5) $(\{-1, 1\}, \cdot)$ 6) $((0, \infty), \cdot)$ 7) $((0, 1], \cdot)$

9. Za polinome $p(x) = (x+1)^3 x^3 (x-2)^6$ i $q(x) = x^5 (x+1)^4 (x-5)^2 (x+2)^3$ nad poljem realnih brojeva izračunati: $NZD(p, q) = (x+1)^2 x^3 (x-2)^6$

10. Zaokružiti brojeve ispred tvrdjenja koja su tačna u svakoj grupi $(P, +)$, gde je h neutralni, a $-x$ inverzni za x :

- 1) $a + h = h$ 2) $-a + a = h$ 3) $h + h = h$ 4) $-h = h$ 5) $-(a + b) = -b + (-a)$ 6) $-(a + b) = -a + (-b)$

11. Koreni polinoma $x^2 - x\sqrt{2} + 1$ su: 1) $e^{i\frac{3\pi}{4}}$, 2) $e^{-i\frac{\pi}{4}}$, 3) $e^{-i\frac{3\pi}{4}}$, 4) $-e^{i\frac{3\pi}{4}}$, 5) $-e^{-i\frac{3\pi}{4}}$, 6) $e^{i\frac{\pi}{4}}$, 7) $-e^{i\frac{\pi}{4}}$.

12. Koreni polinoma $x^2 - i$ su: 1) $e^{i\frac{3\pi}{4}}$, 2) $e^{-i\frac{3\pi}{4}}$, 3) $-e^{i\frac{3\pi}{4}}$, 4) $-e^{-i\frac{3\pi}{4}}$, 5) $e^{i\frac{\pi}{4}}$, 6) $e^{-i\frac{\pi}{4}}$, 7) $-e^{i\frac{\pi}{4}}$.

13. NZD za polinome $x^2 - x\sqrt{2} + 1$ i $x^2 - i$ je polinom: $NZD(x^2 - x\sqrt{2} + 1, x^2 - i) = x - e^{i\frac{\pi}{4}}$

14. Izračunati: 1) $\arg(-7) = \pi$ 2) $\arg(-3i) = -\frac{\pi}{2}$ 3) $\arg(9) = 0$ 4) $\arg(-0) = \pi$
5) $\arg(8i) = \frac{\pi}{2}$ 6) $\arg(-1 + i) = \frac{3\pi}{4}$ 7) $\arg(\sqrt{3} - i) = -\frac{\pi}{6}$ 8) $\arg(-\sqrt{3} + 1) = \frac{5\pi}{6}$

15. Napisati tablicu grupoida $(\{1, 3, 7, 9\}, \cdot)$, gde je $\cdot$ množenje po modulu 10. Odrediti inverzne elemente i izračunati:

$\cdot$	1	3	7	9
1	1	3	7	9
3	3	9	1	7
7	7	1	9	3
9	9	7	3	1

$1^{-1} = 1$, $3^{-1} = 3$, $7^{-1} = 7$, $9^{-1} = 9$ $(9 \cdot 7)^{-1} = 3$, $7^{-1} \cdot 9^{-1} = 7$

Da li je $(\{1, 3, 7, 9\}, \cdot)$ Abelova grupa? **DA** NE. Zaokružiti tačan odgovor.

Da li je $(\{1, 3, 7, 9\}, \cdot) = (\{3^n | n \in \mathbb{N}\}, \cdot)$? **DA** NE. Zaokružiti tačan odgovor.

Haseov dijagram



16. Da li je $\rho = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (3, 5), (4, 3), (4, 2), (4, 5), (2, 5)\}$ relacija poretka skupa $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$: **DA** NE, i ako jeste, nacrtati njen Haseov dijagram. Odrediti

minimalne: 1, 2, 3, 4, 5

, maksimalne: 5

najveći element:

i najmanji element:

17. Ako je p polinom stepena 4 nad poljem $\mathbb{R}$ i ako je svodljiv u tom polju, tada p : 1) uvek ima korena u polju $\mathbb{R}$ 2) nema korena u polju $\mathbb{R}$ 3) nekada ima, a nekad nema korena u polju $\mathbb{R}$ 4) je uvek normalizovan 5) ništa od prethodnog

15. Koje jednakosti su tačne za sve $z \in \mathbb{C}$ i sve $\varphi \in (-\pi, \pi]$ za koje su i definisane:
 1) $e^{-i\varphi} = e^{-i\varphi}$ 2) $e^{i(\arg z - \arg(-z))} = -1$ 3) $e^{i(\arg z + \arg(-z))} = 1$ 4) $1 = z\bar{z}|z|^{-2}$ 5) $\arg z > 0 \Rightarrow \arg z - \arg(-z) = \pi$

16. U skupu kompleksnih brojeva je:
 1) $\sqrt{z\bar{z}} = |z|$ 2) $z = e^{i\frac{\pi}{4}} \Rightarrow z^{-1} = \bar{z}$ 3) $|z_1 z_2| = |z_2| |z_1|$ 4) $\operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$ 5) $\frac{z_1 - z_2}{z_1 + z_2} = \frac{\bar{z}_2 - \bar{z}_1}{\bar{z}_2 + \bar{z}_1}$ 6) $|z| = 1 \Leftrightarrow z^{-2} = \bar{z}^2$ 7) $|-z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ 8) $|z_1| |z_2| = |z_2| |z_1| \Rightarrow \arg z_1 = \arg z_2$

17. U skupu $\mathbb{N}$ date su relacije:
 $\rho_1 = \{(x, x) | x \in \mathbb{N}\} \cup \{(x, x+1) | x \in \mathbb{N}\}$, $\rho_2 = \{(x, x) | x \in \mathbb{N}\}$,
 $\rho_3 = \{(x, y) | y \in \{1, 2, \dots, x\}, x \in \mathbb{N}\}$, $\rho_4 = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{N}, x \cdot y \text{ je neparan broj}\}$,
 $\rho_5 = \{(1, 1), (2, 2)\}$, $\rho_6 = \emptyset$, $\rho_7 = \mathbb{N}^2$

Iza oznake svake od tih relacija zaokružiti samo ona slova koja označavaju svojstvo relacije koju ona poseduje: R- refleksivnost S- simetričnost A- antisimetričnost T- tranzitivnost.

ρ_1 : RSATF ρ_2 : RSATF ρ_3 : RSATF ρ_4 : RSATF ρ_5 : RSATF ρ_6 : RSATF ρ_7 : RSATF

18. Neka je A najveći podskup od $\mathbb{R}$ a B najmanji podskup skupa $\mathbb{R}$ za koje je funkcija $f: A \rightarrow B$ definisana sa $f(x) = -\sqrt{1-x}$. Tada $A = (-\infty, 1]$, $f(0) = -1$, $f(1) = 0$ i $B = [-1, 0]$. Funkcija $f: A \rightarrow B$ je:
 1) surjektivna i neinjektivna 2) injektivna i nesurjektivna 3) ni injektivna ni surjektivna 4) bijektivna 5) $f^{-1}(x) = 1-x^2$. Ako $f^{-1}: O \rightarrow S$, tada je
 $O = (-\infty, 0]$, $S = (-\infty, 1]$

19. Za kompleksni broj $z = 1 + e^{i\frac{\pi}{6}}$, naći:
 $\operatorname{Re}(z) = \frac{2+\sqrt{3}}{2}$, $\operatorname{Im}(z) = \frac{1}{2}$, $|z| = \sqrt{2+\sqrt{3}}$, $\arg(z) = \frac{\pi}{12}$, $\bar{z} = \sqrt{2+\sqrt{3}} e^{-i\frac{\pi}{12}}$, $z^2 = (2+\sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{6}}$

20. Neka je $A = \{1, 2, 3\}$ i $B = \{1, 2\}$. Odrediti broj elemenata sledećih skupova funkcija ako $f \nearrow$ označava rastuću funkciju f i $f \searrow$ označava neopadajuću funkciju f :

$$\begin{aligned} |\{f|f: A \rightarrow B\}| &= 8 \quad |\{f|f: A \xrightarrow{1-1} B\}| = 0 \quad |\{f|f: A \rightarrow B \wedge f \nearrow\}| = 2 \quad |\{f|f: B \xrightarrow{na} B\}| = 2 \\ |\{f|f: A \xrightarrow{na} B\}| &= 6 \quad |\{f|f: A \xrightarrow{1-1} A\}| = 6 \quad |\{f|f: B \rightarrow A \wedge f \searrow\}| = 6 \quad |\{f|f: B \rightarrow A\}| = 3 \end{aligned}$$

21. Neka su $f: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ i $g: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ definisane sa $f(x) = e^x - 1$ i $g(x) = \frac{1}{x^2}$. Izračunati:

$$1) f^{-1}(x) = \ln(x+1) \quad 2) g^{-1}(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \quad 3) (f \circ g)(x) = \frac{e^{\frac{1}{x^2}} - 1}{x^2} \quad 4) (f \circ g)^{-1}(x) = \frac{1}{\sqrt{\ln(x+1)}} \quad 5) (g^{-1} \circ f^{-1})(x) = \frac{1}{\sqrt{\ln(x+1)}}$$

22. Zaokružiti brojeve ispred tvrđenja koja su tačna u Bulovoj algebri $B = (\{0, 1\}, +, \cdot, ', 0, 1)$.

$$\begin{aligned} 1) x = xy + xy' \quad 2) xx' = (x+1)' \quad 3) xx = x + x \quad 4) xy = x + y \quad 5) xy = 1 \Rightarrow x = 1 \\ 6) xy = 0 \Rightarrow (x=0 \vee y=0) \quad 7) (x=0 \vee y=0) \Rightarrow xy = 0 \\ 8) (\forall x \in B)(\exists y \in B) x + y = 1 \wedge xy = 0 \end{aligned}$$

23. Grupe su:
 1) $(\{f_k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} | f_k(x) = k^2 x, k \in \mathbb{R}\}, +)$ 2) $(\{f_k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} | f_k(x) = kx, k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}, \circ)$ 3) $(\{f_k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} | f_k(x) = kx, k \in \mathbb{R}\}, +)$ 4) $(\{f_k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} | f_k(x) = k^2 x, k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}, \circ)$ 5) $(\{f_k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} | f_k(x) = kx, k \in \mathbb{R}^+\}, \circ)$ 6) $(\{f|f: \mathbb{R} \xrightarrow{1-1} \mathbb{R}\}, \circ)$

24. Zaokružiti podgrupe grupe $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$:
 1) $(\{-1, 1\}, \cdot)$ 2) $((0, \infty), \cdot)$ 3) $(\{-1, i, 1, -i\}, \cdot)$ 4) $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, +)$ 5) $(\mathbb{Z} \setminus \{0\}, \cdot)$ 6) $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, +)$ 7) $((0, 1), \cdot)$ 8) $((-\infty, 0), \cdot)$ 9) $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$ 10) $(\{e^{i\theta} | \theta \in \mathbb{R}\}, \cdot)$

25. Napisati primere beskonačnog prstena bez jedinice $(A, +, \cdot)$ i konačnog prstena bez jedinice $(B, +, \cdot)$.
 $A = \{7k | k \in \mathbb{Z}\}$ $B = \mathbb{Z}_6 \setminus \{1, 3\}$

26. Zaokružiti oznaku polja za koje važi da je polinom $t^3 + t + 1$ svodljiv nad njima. $\mathbb{Q}$ $\mathbb{R}$ $\mathbb{C}$ $\mathbb{Z}_2$ $\mathbb{Z}_3$ $\mathbb{Z}_5$

27. Ako je p polinom stepena manjeg od 3 nad poljem $\mathbb{C}$ tada je polinom p :
 1) uvek svodljiv 2) uvek nesvodljiv 3) ništa od prethodnog.

28. $f \in \mathbb{R}[x]$ i $f(1-2i) = 0$. Zaokružiti tačno:
 1) $x-1+2i | f(x)$ 2) $x-1-2i | f(x)$ 3) $x-e^{2i} | f(x)$ 4) $x^2-2x+5 | f(x)$ 5) $x^2+2x+4 | f(x)$ 6) $x^2-x+1 | f(x)$ 7) $x-e^{-i} | f(x)$

1. Neka je $z = 1 + i$, $u = 4 + 2i$ i $w = 2 + 3i$. Rotacijom tačke z oko tačke w za ugao $\frac{\pi}{2}$ dobija se tačka $2 + 5i$, translacijom tačke z za vektor w dobija se tačka $3 + 4i$, $\angle zuw = \frac{3\pi}{4}$.

KOLOKVIJUM 1, PRIMER 13

1. Neka su $f : (-1, \infty) \rightarrow (-\infty, 0)$ i $g : (-1, \infty) \rightarrow (-\infty, 0)$ definisane sa $f(x) = -\sqrt{1+x}$ i $g(x) = -(x+1)^3$. Izračunati:

1) $f^{-1}(x) = \sqrt{1-x}$ 2) $g^{-1}(x) = \sqrt[3]{-x-1}$ 3) $(f \circ g)(x) = -\sqrt{1-(x+1)^3}$ 4) $(f \circ g)^{-1}(x) = \sqrt[3]{-1-\sqrt{1-x}}$ 5) $(g^{-1} \circ f^{-1})(x) = \sqrt[3]{-1-\sqrt{1-x}}$

2. Injektivne funkcije su: ① $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$, $f(x) = x^2$ ② $f : [-1, 1] \rightarrow [0, 2\pi]$, $f(x) = \arccos x$ ③ $f : [\pi, \frac{3\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$, $f(x) = \cos x$ ④ $f : [-3, 0] \rightarrow [0, 11]$, $f(x) = x^2$ ⑤ $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x$

3. Zaokružiti brojeve ispred tvrđenja koja su tačna u svakoj Bulovoj algebri $(B, +, \cdot, ', 0, 1)$:
 1) $(a')' = (a + 1)'$ 2) $aa' = 1'$ 3) $a \cdot 1' = (1')'$ 4) $1 + a = 0'$ 5) $ab = (a' + b')'$

4. Skup kompleksnih rešenja jednačine $x^3 = 1$ je $S = \{1, \epsilon, \epsilon^2\}$.

5. Za kompleksni broj $z = e^{i\pi} + i$, naći:
 $Re(z^2) = 0$, $Im(z^2) = -1$, $|z| = \sqrt{2}$, $\arg(z) = \frac{3\pi}{4}$, $\bar{z} = \sqrt{2}e^{-i\frac{3\pi}{4}}$, $z^3 = \sqrt{2}e^{-i\frac{3\pi}{4}}$

6. Sledeće kompleksne brojeve napisati u eksponencijalnom obliku, odnosno u obliku $\rho e^{i\varphi}$, $\rho \in [0, \infty)$, $\varphi \in (-\pi, \pi]$:
 $2^2 = 4e^{i0}$, $(\sqrt{i})^2 = e^{i\frac{\pi}{4}}$, $\sqrt{(i)^2} = i$, $-1 - i = \sqrt{2}e^{-i\frac{3\pi}{4}}$, $\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}e^{i0}$, $-\frac{\pi}{2}i = \frac{\pi}{2}e^{-i\frac{\pi}{2}}$

7. Zaokružiti broj (ili brojeve) ispred struktura koje su asocijativno komutativni grupoidi.
 1) $(\mathbb{N}, +)$ 2) $(\mathbb{N}, \cdot)$ 3) $(\{-1, 0, 1\}, \cdot)$ 4) $(\{-1, 1\}, +)$ 5) $(\mathbb{R}, \cdot)$ 6) $((0, \infty), +)$ 7) $(\{-1, 1\}, \cdot)$ 8) $((0, \infty), \cdot)$

8. Neka su P i Q polinomi drugoga stepena i $P \neq -Q$. Tada je $dg(P+Q) \in \{0, 1\}$ i $dg(PQ) \in \{0, 1\}$.

9. Pri deljenju polinoma $x^2 + 1$ sa $x + 1$ nad $\mathbb{R}$, količnik je $x - 1$, a ostatak je 2 .

10. Neka su f i g funkcije definisane sa $f = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a & d & b & c \end{pmatrix}$, $g = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ d & b & c & a \end{pmatrix}$. Tada je $f \circ g = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ c & d & a & b \end{pmatrix}$, $f^{-1} = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ c & d & a & b \end{pmatrix}$, $g^{-1} = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ d & b & c & a \end{pmatrix}$, $(f \circ g)^{-1} = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ c & d & a & b \end{pmatrix}$, $f^{-1} \circ g^{-1} = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ c & d & a & b \end{pmatrix}$.

11. Iza oznake svake od datih relacija u skupu $\mathbb{R}$ zaokružiti samo ona slova koja označavaju svojstvo relacije koju ona poseduje: R- refleksivnost S- simetričnost A- antisimetričnost T- tranzitivnost F- funkcija.

$\rho = \{(x, \sqrt{1-x^2}) | x \in (0, 1]\} : \text{R S A T F}$
 $\rho = \{(x, -\frac{1}{x}) | x > 0\} : \text{R S A T F}$
 $\rho = \{(x, y) | x^2 + y^2 = 0\} : \text{R S A T F}$
 $\rho = \{(x, y) | x + y = 0\} : \text{R S A T F}$
 $\rho = \{(x, y) | x \leq y < x + 5\} : \text{R S A T F}$
 $\rho = \{(x, y) | xy < 0\} : \text{R S A T F}$

12. Zajednički koreni polinoma $P(x) = x^2 - (i+1)x + i$ i $Q(x) = x^2 + 1$ su $\{i, -i\}$, a $NZD(P, Q) = x - i$.

13. Zajednički koreni polinoma $P(x) = x^2 - i$ i $Q(x) = x^4 + 1$ su $\{e^{i\frac{\pi}{4}}, e^{i\frac{5\pi}{4}}\}$, a $NZD(P, Q) = (x - e^{i\frac{\pi}{4}})(x - e^{i\frac{5\pi}{4}})$.

14. Zaokružiti broj (ili brojeve) ispred tvrđenja koja su tačna u svakom prstenu $(F, +, \cdot)$: ① $a + (-a) = 0$ ② $a + bc = (a+b)(a+c)$ ③ $(F, +)$ je grupa ④ $(F, \cdot)$ je grupa ⑤ operacija $+$ je distributivna prema $\cdot$ ⑥ $ab = 0 \Rightarrow a = 0 \vee b = 0$ ⑦ $a \neq 0 \wedge b \neq 0 \Rightarrow ab \neq 0$ ⑧ $a \cdot 0 = 0$ ⑨ $a \cdot (-a) = -a^2$

15. Zaokružiti brojeve ispred tačnih iskaza. ① $\arg z \in (0, \pi] \Leftrightarrow I_m(z) > 0$ ② $\arg z \leq 0 \Rightarrow I_m(z) \leq 0$ ③ $\arg z \leq 0 \Leftrightarrow I_m(z) \leq 0$ ④ $0 \leq \arg z < \frac{\pi}{2} \Rightarrow Re(z) > 0$ ⑤ $-\frac{\pi}{2} \leq \arg z \leq \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow Re(z) \geq 0$

16. Neka je A najveći podskup od $\mathbb{R}$ a B najmanji podskup skupa $\mathbb{R}$ za koje je $f : A \rightarrow B$ definisana sa $f(x) = \ln(x^2 + e^{-1})$. Tada je $A = \mathbb{R}$, $f(0) = -1$ i $B = [-1, \infty)$. Funkcija $f : A \rightarrow B$ je: 1) bijektivna 2) surjektivna ali ne injektivna 3) injektivna ali ne surjektivna 4) niti injektivna niti surjektivna

17. • Koje od navedenih struktura su grupe: 1) $(\{f_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f_k(x) = k^2x, k \in \mathbb{R}\}, +)$

2) $(\{f_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f_k(x) = kx, k \in \mathbb{R}\}, +)$

3) $(\{f_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f_k(x) = kx, k \in \mathbb{R}\}, \circ)$

4) $(\{f_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f_k(x) = k^2x, k \in \mathbb{R}\}, \circ)$

5) $(\{f_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f_k(x) = kx, k \in \mathbb{R}^+\}, \circ)$

18. • Neka su $z_1 = 1$, $z_2 = 5 + 2i$ i $z_3 = 2 + 3i$ kompleksni brojevi. Tada rotacijom tačke z_1 oko tačke z_3 za ugao $\frac{\pi}{2}$ dobija se tačka $5 + 7i$, translacijom tačke z_1 za vektor z_2 dobija se tačka $6 + 2i$, a $\angle z_1 z_2 z_3 = \frac{\pi}{2}$

19. • Neka je A najveći podskup od $\mathbb{R}$ a B najmanji podskup skupa $\mathbb{R}$ za koje je $f : A \rightarrow B$ definisana sa $f(x) = -\sqrt{1-x^2}$. Tada je $A = [-1, 1]$, $f(0) = -1$, $f(1) = 0$ i $B = [-1, 0]$, a $f : A \rightarrow B$ je: 1) bijektivna 2) surjektivna ali ne injektivna 3) injektivna ali ne surjektivna 4) niti injektivna niti surjektivna

20. • Funkcija $f : (\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}) \rightarrow (-1, \frac{9}{10})$ definisana sa $f(x) = \cos x$ je: 1) surjektivna i nije injektivna 2) injektivna i nije surjektivna 3) nije injektivna i nije surjektivna 4) bijektivna

21. • Funkcija $f : (-\frac{4\pi}{3}, -\frac{2\pi}{3}) \rightarrow [-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}]$ definisana sa $f(x) = \sin x$ je: 1) surjektivna i nije injektivna 2) injektivna i nije surjektivna 3) nije injektivna i nije surjektivna 4) bijektivna

22. • Funkcija $f : [\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}] \setminus \{\frac{\pi}{2}\} \rightarrow \mathbb{R}$ definisana sa $f(x) = \tan x$ je: 1) surjektivna i nije injektivna 2) injektivna i nije surjektivna 3) nije injektivna i nije surjektivna 4) bijektivna

23. • Navesti geometrijsku interpretaciju skupova A, B, C, D, E i sledećih kompleksnih funkcija $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $h : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ i $s : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, kao i odgovoriti na pitanje injektivnosti i surjektivnosti funkcija f, g, h i s .

$f(z) = -\bar{z}$ je refleksija u odnosu na pravu $y = x$

$g(z) = -(-z)$ je rotacija za ugao 0

$h(z) = Re(z)$ je projekcija na realnu os

$s(z) = z \cdot \frac{i-\sqrt{3}}{2}$ je rotacija za $\frac{5\pi}{6}$

$A = \{z \mid z^3 = 1\}$ je jedna jednadžba trećeg stepena

$B = \{z \mid |z^3| = 1\}$ je $\mathbb{C} \setminus \{0\}$

$C = \{z \mid z^2 = -\bar{z}\}$ je $\{-1, 0\}$

$D = \{z \mid \arg(-z) = \overline{\arg(-z)}\}$ je imaginarna osa

$E = \{z \mid Im(z) = iRe(z)\}$ je jedna jednadžba

Zaokružiti slova ispred tačnih iskaza: a) $A \subset B$ b) $C \subseteq D$ c) $D \subseteq C$ d) $B \subseteq D$ e) $D \subseteq E$

24. • Neka je $\{1, 2\}$ skup svih korena polinoma $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, gde su $a, b, c \in \mathbb{R}$. Tada je $a \in \{-4, -5\}$, $b \in \{3, 5\}$ i $c \in \{-2, -4\}$

25. • Neka je $A = \{1, 2, 3\}$ i $B = \{1, 2\}$. Odrediti broj elemenata sledećih skupova funkcija ako $f \nearrow$ označava rastuću funkciju f i $f \searrow$ označava neopadajuću funkciju f :

$$|\{f \mid f : A \rightarrow B\}| = 8 \quad |\{f \mid f : A \xrightarrow{1-1} B\}| = 0 \quad |\{f \mid f : A \rightarrow B \wedge f \nearrow\}| = 0 \quad |\{f \mid f : B \xrightarrow{na} B\}| = 2$$

$$|\{f \mid f : B \rightarrow A\}| = 2 \quad |\{f \mid f : A \rightarrow A \wedge f \nearrow\}| = 1 \quad |\{f \mid f : B \rightarrow A \wedge f \searrow\}| = 6 \quad |\{f \mid f : A \xrightarrow{na} B\}| = 6$$

26. • U skupu kompleksnih brojeva je: 1) $\sqrt{i^2} = i$ 2) $(\forall \varphi \in (-\pi, \pi]) (e^{i\varphi})^{-1} = e^{i\varphi}$ 3) $|z| = 1 \Rightarrow z^{-1} = \bar{z}$ 4) $z^{-1} = \bar{z}|z|^{-2}$ 5) $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$ 6) $z_1 - z_2 = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$ 7) $|z| = 1 \Leftrightarrow z^{-1} = \bar{z}$ 8) $|-z_1 - z_2| = |-z_1| + |-z_2|$ 9) $(\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\})(\exists k \in \mathbb{R}^+) \overrightarrow{Oz_1} = k \overrightarrow{Oz_2} \Leftrightarrow \arg z_1 = \arg z_2 \Leftrightarrow \frac{z_1}{|z_1|} = \frac{z_2}{|z_2|}$

27. • Ako je $P(x) = ax^3 + bx^2 + c$ polinom nad poljem realnih brojeva i ako je $c \neq 0$, tada stepen $dg(P)$ polinoma P je: 1) $dg(P) = 3$ 2) $dg(P) \in \{1, 3\}$ 3) $dg(P) \in \{0, 3\}$ 4) $dg(P) \in \{0, 2, 3\}$ 5) $dg(P) \in \{0, 1, 2, 3\}$

1. Zaokružiti brojeve ispred struktura koje su domeni integriteta: ① $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ② $(\{9k | k \in \mathbb{Z}\}, +, \cdot)$
 3) $(\mathbb{Z}_9, +, \cdot)$ ④ $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ ⑤ $(\mathbb{Z}_3, +, \cdot)$ 6) $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ 7) $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ ⑧ $(\mathbb{R}[t], +, \cdot)$ 9) $(\mathbb{R}^+, +, \cdot)$
2. Ako je p polinom stepena 3 nad nekim poljem F i ako nema koren u tom polju, tada je p : 1) uvek svodljiv
 ② uvek nesvodljiv 3) nekada svodljiv a nekada nesvodljiv 4) ništa od prethodnog 5) uvek normalizovan
3. Zaokružiti broj (ili brojeve) ispred tvrdjenja koje je tačno u Bulovoj algebri $\mathcal{B} = (B, +, \cdot, ', 0, 1)$.
 ① $xx = x + x$ 2) $x'y' = (x + y)'$ ③ $xx' = (x + 1)'$ 4) $xy = 1 \Rightarrow x = 1$
 5) $xy = 0 \Rightarrow (x = 0 \vee y = 0)$ ⑥ $(x = 0 \vee y = 0) \Rightarrow xy = 0$ 7) $y = xy + xy'$
 ⑧ $(\forall x \in B)(\exists y \in B) x + y = 1 \wedge xy = 0$
4. Zaokružiti asocijativno komutativne grupoidne, koji nisu grupe: 1) $(\{z \in \mathbb{C} | \text{Im}(z) = \text{Re}(z)\}, +)$
 2) $(\{f | f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}, \circ)$ ③ $(\mathbb{N} \cup \{0\}, +)$ ④ $(\mathbb{Z}, \cdot)$ ⑤ $(\{7k | k \in \mathbb{Z}\}, \cdot)$ ⑥ $(\mathbb{R}[x], \cdot)$
5. Zaokružiti grupoidne: 1) $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, +)$ ② $((0, \infty), \cdot)$ 3) $((-\infty, 0), \cdot)$ 4) $(\mathbb{N}, \cdot)$
 ⑤ $(\mathbb{Z} \setminus \{0\}, \cdot)$ ⑥ $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, +)$ ⑦ $((0, 1), \cdot)$ 8) $(\{-1, 1\}, +)$ 9) $(\{-1, 0, 1\}, \cdot)$ 10) $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$
6. Zaokružiti oznaku polja za koje važi da je polinom $t^2 + t + 1$ svodljiv nad njima. $\mathbb{Q} \mathbb{R} \mathbb{C} \mathbb{Z}_2 \mathbb{Z}_3 \mathbb{Z}_5$
7. Neka je $f \in \mathbb{R}[x]$ i $f(1 + i) = 0$. Tada važi: ① $x - 1 - i \mid f(x)$; ② $x - 1 + i \mid f(x)$;
 ③ $x^2 - 2x + 2 \mid f(x)$; ④ $x^2 - 2x + 2 \mid f(x)$; ⑤ $x - \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \mid f(x)$ ⑥ $x - e^{i\frac{\pi}{4}} \mid f(x)$

KOLOKVIJUM 1, PRIMER 14

1. Iza oznake svake od tih relacija zaokružiti samo ona slova koja označavaju svojstvo relacije koju ona poseduje: R- refleksivnost, S- simetričnost, A- antisimetričnost, T- tranzitivnost. F.
 $\leq: \text{R S A T F}$ $<: \text{R S A T F}$ $\equiv_3 (x \equiv_3 y \Leftrightarrow 3 \mid (x - y)) : \text{R S A T F}$
2. Neka su $f: (-1, 0) \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, 0)$ i $g: (-1, 0) \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, 0)$ definisane sa $f(x) = \arcsin x$ i $g(x) = 2 \arctg x$. Izračunati:
 1) $f^{-1}(x) = \sin x$ 2) $g^{-1}(x) = \frac{1}{2} \arctg \frac{x}{1}$ 3) $(f \circ g)(x) = \arcsin(\frac{2 \arctg x}{1 + \arctg^2 x})$
 4) $(g^{-1} \circ f^{-1})(x) = \frac{1}{2} \arctg(\frac{\sin x}{1})$ 5) $(f \circ g)^{-1}(x) = \frac{1}{2} \arctg(\frac{\sin x}{1})$
3. Bijektivne funkcije su: ① $f: \mathbb{R}^- \rightarrow \mathbb{R}^-, f(x) = -x^2$ 2) $f: [-1, 1] \rightarrow [-\pi, \pi], f(x) = \arcsin x$
 3) $f: [\frac{\pi}{2}, \pi] \rightarrow [-1, 1], f(x) = \cos x$ ④ $f: [-3, 0] \rightarrow [-8, 1], f(x) = 1 - x^2$ ⑤ $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \ln x$
4. Zaokružiti brojeve ispred tvrdjenja koja su tačna u svakoj Bulovoj algebri $(B, +, \cdot, ', 0, 1)$:
 ① $(1')' = (a \cdot 1')'$ ② $(aa')' = 0'$ ③ $a + 1' = (a')'$ ④ $1 + a = (1')'$ ⑤ $(ab)' = (a' + b')'$
5. Skup kompleksnih rešenja jednačine $x^2 = 2i$ je $S = \{ \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}, \sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}} \}$.
6. Za kompleksni broj $z = e^{i\pi} + e^{i\frac{\pi}{3}}$, naći:
 $\text{Re}(z^2) = -2$, $\text{Im}(z^2) = -\sqrt{3}$, $|z| = 2$, $\arg(z) = \frac{\pi}{2}$, $\bar{z} = e^{-i\pi} + e^{-i\frac{\pi}{3}}$, $z^3 = 1$
7. Sledeće kompleksne brojeve napisati u eksponencijalnom obliku, odnosno u obliku $\rho e^{i\varphi}$, $\rho \in [0, \infty)$, $\varphi \in (-\pi, \pi]$:
 $-2^2 = 4e^{i\pi}$, $(\sqrt[3]{i})^3 = e^{i\pi}$, $\sqrt[3]{(i)^3} = \sqrt[3]{-1} = -1 = e^{i\pi}$, $\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}e^{i0}$, $-\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3}e^{i\pi}$
8. Zaokružiti broj (ili brojeve) ispred struktura koje su komutativne grupe.
 1) $(\mathbb{N}, +)$ 2) $(\mathbb{N}, \cdot)$ 3) $(\{-1, 0, 1\}, \cdot)$ ④ $(\{-1, 1\}, +)$ 5) $(\mathbb{R}, \cdot)$ ⑥ $((0, \infty), +)$ ⑦ $(\{-1, 1\}, \cdot)$ ⑧ $((0, \infty), \cdot)$
9. Neka su P i Q polinomi trećega stepena i $P \neq -Q$. Tada je $dg(P + Q) \in \{0, 1, 2, 3\}$ i $dg(PQ) \in \{0, 1, 2, 3\}$.
10. Pri deljenju polinoma $x^3 - 1$ sa $x + 1$ nad $\mathbb{R}$, količnik je $-x^2 + x - 1$, a ostatak je -1 .
11. Neka su f i g funkcije definisane sa $f = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ d & c & b & a \end{pmatrix}$, $g = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \end{pmatrix}$. Tada je $f \circ g = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ c & d & a & b \end{pmatrix}$,
 $f^{-1} = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ d & c & b & a \end{pmatrix}$, $g^{-1} = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ c & d & a & b \end{pmatrix}$, $(f \circ g)^{-1} = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ c & d & a & b \end{pmatrix}$, $f^{-1} \circ g^{-1} = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ d & c & b & a \end{pmatrix}$

17. Neka su $f : (-1, 0) \rightarrow (-1, 0)$ i $g : (-1, 0) \rightarrow (-1, 0)$ definisane sa $f(x) = -\sqrt{1-x^2}$ i $g(x) = x^2 - 1$. Izračunati:

1) $f^{-1}(x) = -\sqrt{1-x^2}$ 2) $g^{-1}(x) = \sqrt{1-x}$ 3) $(f \circ g)(x) = \sqrt{1-x^2}$
 4) $(g^{-1} \circ f^{-1})(x) = \sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}$ 5) $(f \circ g)^{-1}(x) = -\sqrt{1-x^2}$

18. Broj svih simetričnih relacija skupa $A = \{1, 2\}$ je: 8

19. Zaokružiti broj (ili brojeve) ispred tvrđenja koje je tačno u Bulovoj algebri $B = (B, +, \cdot, ', 0, 1)$.

1) $xx = x + x$ 2) $xy = x + y$ 3) $xy = (x + y)'$ 4) $xy = 0 \Rightarrow (x = 0 \vee y = 0)$
 5) $(x = 0 \vee y = 0) \Rightarrow xy = 0$ 6) $x = xy + xy'$ 7) $(\forall x \in B)(\exists y \in B) x + y = 1 \wedge xy = 0$

20. Neka je $A = \{1, 2, 3\}$ i $B = \{2, 3, 4\}$ i binarne relacije $f_1 = \{(1, 3), (2, 4)\}$, $f_2 = \{(1, 3), (3, 4), (2, 3)\}$, $f_3 = \{(3, 3), (2, 2), (1, 4)\}$, $f_4 = \{(3, 3), (2, 3), (1, 3)\}$. Popuniti obavezno sa da ili ne:

\	f_i je funkcija	f_i je funkcija skupa A u skup B	$f_i : A \xrightarrow{1-1} B$	$f_i : A \xrightarrow{na} B$	$f_i : A \xrightarrow{1-1}_{na} B$
f_1	da	ne	ne	ne	ne
f_2	da	ne	ne	da	ne
f_3	da	ne	ne	da	ne
f_4	da	da	ne	ne	ne

21. Neka je A najveći podskup od $\mathbb{R}$ a B najmanji podskup skupa $\mathbb{R}$ za koje je $f : A \rightarrow B$ definisana sa $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$. Tada je $A = \mathbb{R}$, $f(\frac{1}{2}) = \frac{2}{5}$ i $B = [-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$. Funkcija $f : A \rightarrow B$ je:

- a) surjektivna ali ne injektivna b) injektivna ali ne surjektivna
 c) niti injektivna niti surjektivna d) bijektivna

22. Zaokružiti broj (ili brojeve) ispred tvrđenja koja su tačna u svakom polju $(F, +, \cdot)$:

1) $a + bc = (a + b)(a + c)$ 2) $(F, \cdot)$ je grupa 3) $(F, \cdot)$ je grupoid 4) operacija $+$ je distributivna prema $\cdot$ 5) $ab = 0 \Rightarrow a = 0 \vee b = 0$ 6) $a \neq 0 \wedge b \neq 0 \Rightarrow ab \neq 0$ 7) $a \cdot 0 = 0$ 8) $a \cdot (-a) = -a^2$
 9) $a + (-a) = 0$

23. Neka su z_1, z_2 i z_3 kompleksni brojevi. Tada rotacijom tačke z_2 oko tačke z_1 za ugao $\frac{\pi}{2}$ dobija se tačka z_3 , translacijom tačke z_1 za vektor z_2 dobija se tačka z_4 , a $z_3 z_1 z_2 = \frac{z_4 - z_1}{z_2 - z_1}$.

24. Zaokružiti brojeve ispred surjektivnih funkcija:

1) $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow (-\infty, 3)$, $f(x) = 3 - x$ 2) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$ 3) $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow (0, \infty)$, $f(x) = \sqrt{x}$
 4) $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, $f(x) = x^6$ 5) $f : (0, \frac{\pi}{2}) \rightarrow (0, \infty)$, $f(x) = \tan x$ 6) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$

25. Funkcija f je injektivna ako i samo ako za svako x, y, a i b važi: 1) $((x, a) \in f \wedge (y, a) \in f) \Rightarrow x = y$
 2) $((x, a) \in f \wedge (y, a) \in f) \Rightarrow x \neq y$ 3) $x = y \Rightarrow f(x) = f(y)$ 4) $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$
 5) $f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$

26. Neka je $A = \{1, 2, 3\}$ i $B = \{1, 2, 3, 4\}$. Odrediti broj elemenata sledećih skupova funkcija:

$|\{f|f : A \rightarrow B\}| = 81$ $|\{f|f : A \xrightarrow{1-1} B\}| = 24$ $|\{f|f : A \rightarrow B \wedge f \nearrow\}| = 4$ $|\{f|f : B \xrightarrow{na} B\}| = 1$
 $|\{f|f : B \rightarrow A\}| = 81$ $|\{f|f : A \xrightarrow{1-1} A\}| = 6$ $|\{f|f : B \rightarrow A \wedge f \nearrow\}| = 15$ $|\{f|f : A \xrightarrow{na} A\}| = 1$

27. Navesti geometrijsku interpretaciju skupova A, B, C, D, E i sledećih kompleksnih funkcija $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $h : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ i $s : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, kao i odgovoriti na pitanje injektivnosti i surjektivnosti funkcija f, g, h i s .

$f(z) = -\bar{z} \frac{1+i}{\sqrt{2}}$ je simetrija oko pravca koji prolazi kroz tačku $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ i ima nagib $\frac{1}{2}$.

$g(z) = -\bar{z}$ je simetrija oko imaginarne ose.

$h(z) = Re(z)$ je projekcija na realnu osu.

$s(z) = z \cdot \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ je rotacija za $\frac{\pi}{3}$.

$A = \{z|z^3 = -1\}$ je skup tri tačke na jediničnoj kružnici.

$B = \{z||z^3| = -1\}$ je prazan skup.

$C = \{z | z^3 = -\bar{z}\}$ je $\{1, -1, -i\}$ $\{1, -1, -i, e\}$
 $D = \{z | \arg(-z) = \arg(-\bar{z})\}$ je $\{z \in \mathbb{C} | \arg(z) = \arg(\bar{z})\}$
 $E = \{z | I_m(z) = iR_e(z)\}$ je $\{z \in \mathbb{C} | \operatorname{Im}(z) = \operatorname{Re}(z)\}$

Zaokružiti slova ispred tačnih iskaza: a) $A \subset B$ b) $C \subseteq D$ c) $D \subseteq C$ d) $B \subseteq D$ e) $D \subseteq E$

12. Neka je $\{1, -1, 2\}$ skup svih korena polinoma $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, gde su $a, b, c \in \mathbb{R}$. Tada je
 $a \in \{ \quad -2 \quad \}$, $b \in \{ \quad -1 \quad \}$, $c \in \{ \quad 2 \quad \}$

14. U skupu kompleksnih brojeva je: 1) $\sqrt{4} = 2$ 2) $(e^{i\varphi})^{-1} = \overline{e^{i\varphi}}$ 3) $|z|^2 = 1 \Rightarrow z^{-1} = \bar{z}$
 4) $z \neq 0 \Rightarrow z = z^2 \bar{z} |z|^{-2}$ 5) $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$ 6) $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$ 7) $|z|^3 = 1 \Leftrightarrow z^{-1} = \bar{z}$
 8) $|-z_1 - z_2| \leq |-z_1| + |-z_2|$
 9) $(\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\})(\exists k \in \mathbb{R}^+) \overrightarrow{Oz_1} = k \overrightarrow{Oz_2} \Leftrightarrow \arg z_1 = \arg z_2 \Leftrightarrow \frac{z_1}{|z_1|} = \frac{z_2}{|z_2|}$

15. Ako je $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ polinom nad poljem realnih brojeva i ako je $d \neq 0$, tada stepen $dg(P)$ polinoma P je: 1) $dg(P) = 3$ 2) $dg(P) \in \{1, 3\}$ 3) $dg(P) \in \{0, 3\}$ 4) $dg(P) \in \{0, 2, 3\}$
 5) $dg(P) \in \{0, 1, 2, 3\}$

16. Zaokružiti brojeve ispred struktura koje su domeni integriteta: 1) $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ 2) $(\{9k | k \in \mathbb{Z}\}, +, \cdot)$
 3) $(\mathbb{Z}_9, +, \cdot)$ 4) $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ 5) $(\mathbb{Z}_3, +, \cdot)$ 6) $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ 7) $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ 8) $(\mathbb{R}[t], +, \cdot)$ 9) $(\mathbb{R}^+, +, \cdot)$

17. Ako je p svodljiv polinom stepena 3 nad nekim poljem F tada polinom p : 1) uvek ima koren upolju F
 2) nekad ima koren upolju F 3) nema koren u polju F 4) ništa od prethodnog 5) je uvek normalizovan

18. Zaokružiti oznaku polja za koje važi da je polinom $t^{2015} + 1$ svodljiv nad njima. $\mathbb{Q}$ $\mathbb{R}$ $\mathbb{C}$ $\mathbb{Z}_2$ $\mathbb{Z}_3$ $\mathbb{Z}_5$

19. Neka je $f \in \mathbb{R}[x]$ i $f(1) = 0$. Tada važi: 1) $x - 1 \mid f(x)$; 2) $x + 1 \mid f(x)$;
 3) $x^2 - 1 \mid f(x)$; 4) $x^2 - 2x + 1 \mid f(x)$; 5) $x - e^{i2\pi} \mid f(x)$ 6) $x - e^{-i2\pi} \mid f(x)$

KOLOKVIJUM 1, PRIMER 15

1. Da li je $\rho = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (5, 1), (1, 2), (5, 3), (5, 4), (4, 1), (3, 1)\}$ relacija poretka skupa $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$: DA (NE) i ako jeste, nacrtati Haseov dijagram, odrediti minimalne: , maksimalne: , najveći: , najmanji: element.

2. Neka su $f : (-1, 0) \rightarrow (\frac{\pi}{2}, \pi)$ i $g : (-1, 0) \rightarrow (\frac{\pi}{2}, \pi)$ definisane sa $f(x) = \arccos x$ i $g(x) = \frac{\pi}{2}x + \pi$. Izračunati:

1) $f^{-1}(x) = \cos x$ 2) $g^{-1}(x) = \frac{2}{\pi}(x - \pi)$ 3) $(f \circ g)(x) = \arccos(\frac{\pi}{2}x + \pi)$
 4) $(g^{-1} \circ f^{-1})(x) = \frac{2}{\pi}(\cos x - \pi)$ 5) $(f \circ g)^{-1}(x) = \frac{2}{\pi}(\cos x - \pi)$

3. Injektivne funkcije su: 1) $f : \mathbb{R}^- \rightarrow \mathbb{R}^-$, $f(x) = -x^2$ 2) $f : [-1, 1] \rightarrow [-\pi, \pi]$, $f(x) = \arcsin x$
 3) $f : [\frac{\pi}{2}, \pi] \rightarrow [-1, 1]$, $f(x) = \cos x$ 4) $f : [-3, 1] \rightarrow [-8, 0]$, $f(x) = 1 - x^2$
 5) $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x^2$

4. Zaokružiti brojeve ispred tvrđenja koja su tačna u svakoj Bulovoj algebri $(B, +, \cdot, ', 0, 1)$:

1) $(1' + 1) = (a \cdot 1')'$ 2) $(aa')' = 1'$ 3) $a + 0' = (a')'$ 4) $1 + a = (1')'$ 5) $ab = (a' + b')'$

5. Skup kompleksnih rešenja jednačine $x = \sqrt{9}$ je $S = \{ \quad -3, 3 \quad \}$.

6. Za kompleksni broj $z = e^{i\frac{\pi}{2}} + e^{i\frac{\pi}{6}}$, naći:
 $\operatorname{Re}(z^2) = \quad \frac{\sqrt{3}}{2} \quad$, $\operatorname{Im}(z^2) = \quad \frac{1}{2} \quad$, $|z| = \quad \sqrt{2} \quad$, $\arg(z) = \quad \frac{\pi}{3} \quad$, $\bar{z} = \quad e^{-i\frac{\pi}{2}} + e^{-i\frac{\pi}{6}} \quad$, $z^3 = \quad -\sqrt{3} \quad$.

7. Napisati u eksponencijalnom obliku, odnosno obliku $\rho e^{i\varphi}$, $\rho \in [0, \infty)$, $\varphi \in (-\pi, \pi]$ ako je $\sqrt{\quad}$ kompleksni:
 $2^{-2} = \quad e^{-i\pi} \quad$, $(\sqrt{4})^2 = \quad 2 \quad$, $\sqrt{(4)^2} = \quad e^{i\frac{\pi}{2}}, e^{i\frac{3\pi}{2}} \quad$, $-1 - i = \quad \sqrt{2} e^{i\frac{225^\circ}{4}} \quad$, $\frac{\pi}{6} \cdot (-1) = \quad \frac{\pi}{6} e^{i\pi} \quad$, $-\frac{\pi}{3}i = \quad \frac{\pi}{3} e^{i\frac{3\pi}{2}} \quad$

8. Zaokružiti broj (ili brojeve) ispred struktura koje su grupoidi.

1) $(\mathbb{N}, +)$ 2) $(\mathbb{N}, \cdot)$ 3) $(\{-1, 0, 1\}, \cdot)$ 4) $(\{-1, 1\}, +)$ 5) $(\mathbb{R}, \cdot)$ 6) $((0, \infty), +)$ 7) $(\{-1, 1\}, \cdot)$ 8) $((-\infty, 0), \cdot)$

9. Neka su P i Q polinomi četvrtog stepena i $P \neq -Q$. Tada je $dg(P + Q) \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ i $dg(PQ) \in \{2\}$.

10. Pri deljenju polinoma $x^3 + 2$ sa $x + 1$ nad $\mathbb{R}$, količnik je $x^2 - x + 1$, a ostatak je 2 .

11. Neka su f i g funkcije definisane sa $f = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ c & a & d & b \end{pmatrix}$, $g = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ d & c & a & b \end{pmatrix}$. Tada je $f^{-1} = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ d & c & a & b \end{pmatrix}$, $g^{-1} = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ c & d & b & a \end{pmatrix}$, $(f \circ g)^{-1} = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ c & a & d & b \end{pmatrix}$, $f^{-1} \circ g^{-1} = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ d & c & a & b \end{pmatrix}$.

12. Neka su $f : (-1, 0) \rightarrow (-1, 0)$ i $g : (-1, 0) \rightarrow (-1, 0)$ definisane sa $f(x) = -\sqrt{1-x^2}$ i $g(x) = x^2 - 1$. Tada je:

- 1) $f(x) > g(x)$ 2) $f(x) < g(x)$ 3) $f(x) = g(x)$ 4) $f(x) \geq g(x)$ 5) ništa od prethodnog

13. Broj svih antisimetričnih relacija skupa $A = \{1, 2\}$ je: 11

14. Zaokružiti broj (ili brojeve) ispred tvrđenja koje je tačno u Bulovoj algebri $B = (\{0, 1\}, +, \cdot, ', 0, 1)$.

- 1) $xx = x + x$ 2) $xy = 1 \Rightarrow x = 1$ 3) $x = 1 \Rightarrow xy = 1$ 4) $xy = 0 \Rightarrow (x = 0 \vee y = 0)$
5) $(x = 0 \vee y = 0) \Rightarrow xy = 0$ 6) $x = xy + xy'$ 7) $(x = 0 \wedge y = 0) \Rightarrow xy = 0$

15. Neka je $A = \{1, 2\}$, $B = \{5, 6, 7, 8\}$, $f_1 = \{(1, 5), (2, 6), (1, 7)\}$, $f_2 = \{(1, 5), (1, 5)\}$, $f_3 = \{(1, 8), (2, 5)\}$, $f_4 = \{(1, 7), (2, 7)\}$. Popuniti sa da ili ne ili -.

\	f_i je funkcija	f_i je funkcija skupa A u skup B	$f_i : A \xrightarrow{1-1} B$	$f_i : A \xrightarrow{na} B$	$f : A \xrightarrow{1-1} B$
f_1	ne	ne	ne	ne	ne
f_2	ne	ne	ne	ne	ne
f_3	da	da	da	ne	ne
f_4	da	da	ne	ne	ne

16. Neka je A najveći podskup od $\mathbb{R}$ a B najmanji podskup skupa $\mathbb{R}$ za koje je $f : A \rightarrow B$ definisana sa $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$. Tada je $A = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $f(\frac{1}{2}) = 1$ i $B = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Funkcija $f : A \rightarrow B$ je: a) bijektivna b) injektivna ali ne surjektivna c) niti injektivna niti surjektivna d) surjektivna ali ne injektivna

17. Zaokružiti broj (ili brojeve) ispred tvrđenja koja su tačna u svakom polju $(F, +, \cdot)$:
1) $ac + bc = (a + b)c$ 2) $(F \setminus \{0\}, \cdot)$ je grupa 3) $(F, \cdot)$ je grupoid 4) operacija $+$ je distributivna prema $\cdot$ 5) $ab = 0 \Rightarrow a = 0 \vee b = 0$ 6) $a \neq 0 \wedge b \neq 0 \Rightarrow ab \neq 0$ 7) $a \cdot 0 = 0$ 8) $a \cdot (-a) = -a^2$ 9) $a + (-a) = 0$

18. Neka su z_1, z_2 i z_3 kompleksni brojevi. Tada rotacijom tačke z_3 oko tačke z_2 za ugao $\frac{\pi}{3}$ dobija se tačka $z_1 + (z_3 - z_2)e^{i\frac{\pi}{3}}$, translacijom tačke z_2 za vektor z_1 dobija se tačka $z_1 + z_2$, a $\angle z_3 z_1 z_2 = \frac{\pi}{3}$.

19. Zaokružiti brojeve ispred bijektivnih funkcija:

- 1) $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow (-\infty, 3)$, $f(x) = 3 - x$ 2) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -7x^3$ 3) $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow [0, \infty)$, $f(x) = \sqrt{x}$
4) $f : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$, $f(x) = x^{-6}$ 5) $f : [0, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \tan x$ 6) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$

20. Funkcija f nije injektivna ako i samo ako postoje x, y, a i b takvi da važi:

- 1) $((x, a) \in f \wedge (y, a) \in f) \Rightarrow x = y$ 2) $((x, a) \in f \wedge (y, a) \in f) \Rightarrow x \neq y$ 3) $x = y \Rightarrow f(x) = f(y)$
4) $f(x) = f(y) \Rightarrow x \neq y$ 5) $f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$

21. Neka je $A = \{1\}$ i $B = \{1, 2, 3, 4\}$. Odrediti broj elemenata sledećih skupova funkcija:

$$\begin{aligned} |\{f|f : A \rightarrow B\}| &= 4 & |\{f|f : A \xrightarrow{1-1} B\}| &= 4 & |\{f|f : A \rightarrow B \wedge f \nearrow\}| &= 4 & |\{f|f : B \xrightarrow{na} B\}| &= 1 \\ |\{f|f : B \rightarrow A\}| &= 1 & |\{f|f : A \xrightarrow{1-1} A\}| &= 1 & |\{f|f : B \rightarrow A \wedge f \nearrow\}| &= 1 & |\{f|f : A \xrightarrow{na} A\}| &= 1 \end{aligned}$$

22. Navesti geometrijsku interpretaciju skupova A, B, C, D, E i sledećih kompleksnih funkcija $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $h : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ i $s : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, kao i odgovoriti na pitanje injektivnosti i surjektivnosti funkcija f, g, h i s .

$f(z) = -\bar{z} \frac{1-i}{\sqrt{2}}$ je simetrija oko preseka kruga radijusa $\frac{\sqrt{2}}{2}$ u odnosu na pravu koja prolazi kroz $\frac{1-i}{\sqrt{2}}$
 $g(z) = -\bar{z}$ je simetrija oko imaginarne ose
 $g(z) = -z$ je centralna simetrija
 $g(z) = \bar{z}$ je simetrija oko realne ose

$s(z) = z \cdot \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ je rotacija za $\frac{\pi}{3}$ brijuna
 $A = \{z | z^3 = -1\}$ je tačke jednakostraničnog trougla sa vrhovima koordinatni
 $B = \{z | |z^3| = 0\}$ je koordinatni početak
 $C = \{z | z^3 = -\bar{z}\}$ je $\{0, e^{i\pi}, e^{-i\pi}\}$ tri tačke
 $D = \{z | \arg \bar{z} = \arg z\}$ je realna i imaginarna osa
 $E = \{z | iI_m(z) = R_e(z)\}$ je koordinatni početak
 Zaokružiti slova ispred tačnih iskaza: a) $A \subset B$ b) $C \subseteq D$ c) $D \subseteq C$ d) $B \subseteq D$ e) $D \subseteq E$

13. Neka je $\{1, 0\}$ skup svih korena polinoma $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, gde su $a, b, c \in \mathbb{R}$. Tada je
 $a \in \{-1, -2\}$, $b \in \{0, 1\}$, $c \in \{0\}$

14. U skupu kompleksnih brojeva je: 1) $\sqrt{4} = 2$ 2) $\sqrt{4} = \pm 2$ 3) $(e^{i\varphi})^{-1} = e^{-i\varphi}$ 4) $|z|^2 = 1 \Rightarrow z^{-1} = \bar{z}$
 5) $z \neq 0 \Rightarrow z = z^3 \bar{z} |z|^{-2}$ 6) $|z_1 z_2| = |\bar{z}_2| |\bar{z}_1|$ 7) $|-z_1 - z_2| \geq |-z_1| - |-z_2|$ 8) $|z|^{-5} = 1 \Leftrightarrow z^{-1} = \bar{z}$
 9) $\bar{z_1 z_2} = \bar{z_2} \bar{z_1}$ 10) $(\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\})(\exists k \in \mathbb{R}^-) \quad \overrightarrow{Oz_1} = k \overrightarrow{Oz_2} \Leftrightarrow \arg z_1 = \pm \pi + \arg z_2 \Leftrightarrow \frac{z_1}{z_2} = -\frac{\bar{z_2}}{\bar{z_1}}$

15. Ako je $P(x) = ax^5 + bx^3 + d$ polinom nad poljem realnih brojeva i ako je $d \neq 0$, tada stepen $dg(P)$ polinoma P je: 1) $dg(P) = 5$, 2) $dg(P) \in \{3, 5\}$, 3) $dg(P) \in \{0, 5\}$, 4) $dg(P) \in \{0, 3, 5\}$,
 5) $dg(P) \in \{0, 1, 3, 5\}$

Zaokružiti brojeve ispred struktura koje su prsteni bez delitelja nule: 1) $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ 2) $(\{9k | k \in \mathbb{Z}\}, +, \cdot)$
 3) $(\mathbb{Z}_9, +, \cdot)$ 4) $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ 5) $(\mathbb{Z}_3, +, \cdot)$ 6) $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ 7) $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ 8) $(\mathbb{R}[t], +, \cdot)$ 9) $(\mathbb{R}^+, +, \cdot)$

Ako je p svodljiv polinom stepena 4 nad nekim poljem F tada polinom p : 1) uvek ima koren u polju F
 2) nekad ima koren u polju F 3) nema koren u polju F 4) ništa od prethodnog 5) je uvek normalizovan

Zaokružiti oznaku polja za koje važi da je polinom $t^2 + 1$ svodljiv nad njima. $\mathbb{Q}$ $\mathbb{R}$ ☒ $\mathbb{C}$ $\mathbb{Z}_2$ $\mathbb{Z}_3$ ☒ $\mathbb{Z}_5$

Neka je $f \in \mathbb{R}[x]$ i $f(i) = 0$. Tada važi: 1) $x - i | f(x)$; 2) $x + i | f(x)$;
 3) $x^2 - 1 | f(x)$; 4) $x^2 + 1 | f(x)$; 5) $x - e^{i\frac{\pi}{2}} | f(x)$ 6) $x - e^{-i\frac{\pi}{2}} | f(x)$

Proveriti koje od sledećih ekvivalencija i implikacija su tačne za svaki kompleksni broj z :

1) $-\frac{\pi}{2} \leq \arg z \leq \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow R_e(z) \geq 0$ 2) $-\frac{\pi}{2} \leq \arg z \leq \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow (R_e(z) \geq 0 \wedge z \neq 0)$
 3) $-\frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow R_e(z) > 0$ 4) $\arg z < 0 \Rightarrow I_m(z) \leq 0$ 5) $\arg z < 0 \Leftrightarrow I_m(z) \leq 0$

KOLOKVIJUM 1, PRIMER 16

1. Pri deljenju polinoma $x^3 + 1$ sa $x^2 - x + 1$ nad $\mathbb{R}$, količnik je $x + 1$, a ostatak je 0 .

2. Neka je f funkcija definisana sa $f = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \end{pmatrix}$ i $g = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \end{pmatrix}$. Tada je:

$$f^{-1} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \end{pmatrix}, \quad f \circ g = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \end{pmatrix}, \quad (f \circ g)^{-1} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \end{pmatrix}, \quad g^{-1} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \end{pmatrix}, \quad g^{-1} \circ f^{-1} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \end{pmatrix}.$$

3. Zaokružiti brojeve ispred tvrđenja koja su tačna u svakoj Bulovoj algebri $(B, +, \cdot, ', 0, 1)$:

1) $(a')' = (a' \cdot a)'$ 2) $a \cdot a' = 0'$ 3) $a + 1' = (a')'$ 4) $1 + a' = 0'$ 5) $a' \cdot b' = (a' + b')'$

4. Odrediti realni i imaginarni deo, moduo, argument, i konjugovani broj kompleksnog broja $z = -2 + 2i\sqrt{3}$:
 $R_e(z) = -2$, $I_m(z) = 2\sqrt{3}$, $|z| = 4$, $\arg(z) = \frac{2\pi}{3}$, $\bar{z} = -2 - 2i\sqrt{3}$, $\arg(z^{-1}) = -\frac{2\pi}{3}$.

5. Sledeće kompleksne brojeve napisati u algebarskom obliku:

$$7e^{-6\pi i} = 7, \quad e^{-9\pi i} = -1, \quad 3e^{-i\frac{5\pi}{2}} = -3i, \quad e^{11\pi i} = -1, \quad e^{i\frac{7\pi}{2}} = -i$$

6. Zaokružiti brojeve ispred injektivnih funkcija: 1) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-x}$ 2) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$
 3) $f: [-1, \infty) \rightarrow [-1, \infty)$, $f(x) = (x+1)^2$ 4) $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$
 5) $f: (\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{4}) \rightarrow [-1, 1]$, $f(x) = \cos x$ 6) $f: (\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{4}) \rightarrow [-1, 1]$, $f(x) = \sin x$

7. Zaokružiti broj (ili brojeve) ispred struktura koje su komutativne grupe.
 1) $(\{-1, 1\}, \cdot)$ 2) $(\mathbb{Z} \setminus \{0\}, \cdot)$ 3) $(\mathbb{R}, \cdot)$ 4) $(\mathbb{Q}, +)$ 5) $([0, 1], \cdot)$ 6) $((0, \infty), +)$ 7) $([0, \infty), \cdot)$
7. Neka je $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definisana sa $f(x) = ax^2 + (a+1)x + 2$. Za koje vrednosti parametar $a \in \mathbb{R}$ funkcija f je:
 1) injektivna $a \neq 0$, 2) surjektivna $a = 0$, 3) bijektivna $a = 0$.

9. 1) $\arg z < 0 \Leftrightarrow \operatorname{Im}(z) < 0$ 2) $\arg z < 0 \Rightarrow \operatorname{Im}(z) \leq 0$ 3) $-\frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \operatorname{Im}(z) \in \mathbb{R}$
 4) $\arg z > 0 \Rightarrow \operatorname{Im}(z) > 0$ 5) $-\frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \operatorname{Re}(z) > 0$ 6) $-\frac{\pi}{2} \leq \arg z \leq \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \operatorname{Re}(z) \geq 0$

10. Zaokružiti brojeve ispred tvrđenja koja su tačna u svakoj grupi $(P, \cdot)$, gde je e neutralni, a x^{-1} inverzni za x :

- 1) $a \cdot e = e$ 2) $a^{-1} \cdot a = e$ 3) $e \cdot e = e$ 4) $e^{-1} = e$ 5) $(a \cdot b)^{-1} = b^{-1} \cdot a^{-1}$ 6) $(a \cdot b)^{-1} = a^{-1} \cdot b^{-1}$

11. Neka su $a, b \in \mathbb{R}$ i $w \in \mathbb{C}$ koeficijenti polinoma $P(x) = x^2 + ax + b$ i $Q(x) = x^2 + w$. Ako je $2 - 3i$ zajednički koren polinoma P i Q , tada preostali koreni polinoma P i Q su redom $\alpha_1 = \underline{2+3i}$ i $\alpha' = \underline{-2+3i}$, dok je $a = \underline{-4}$, $b = \underline{13}$ i $w = \underline{5+11i}$.

12. Izračunati: 1) $\arg(-13i) = \underline{-\frac{\pi}{2}}$ 2) $\arg(-31) = \underline{\pi}$ 3) $\arg(29) = \underline{0}$ 4) $\arg(0) = \underline{\text{ne postoji}}$
 5) $\arg(11i) = \underline{\frac{\pi}{2}}$ 6) $\arg(-5-5i) = \underline{-\frac{3\pi}{4}}$ 7) $\arg(\sqrt{3}+i) = \underline{\frac{\pi}{6}}$ 8) $\arg(-\sqrt{3}+1) = \underline{\frac{5\pi}{6}}$

13. Napisati tablicu grupoida $(\{1, 3, 5, 7\}, \cdot)$, gde je $\cdot$ množenje po modulu 8. Odrediti inverzne elemente i izračunati:

$\cdot$	1	3	5	7
1	1	3	5	7
3	3	1	7	5
5	5	7	1	3
7	7	5	3	1

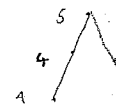
$$1^{-1} = 1, 3^{-1} = 3, 5^{-1} = 5, 7^{-1} = 7, (5 \cdot 7)^{-1} = 3, 7^{-1} \cdot 5^{-1} = 3$$

Da li je $(\{1, 3, 5, 7\}, \cdot)$ komutativna grupa? **DA** NE. Zaokružiti tačan odgovor.

Da li je $(\{1, 3, 5, 7\}, \cdot)$ ciklička grupa? **DA** **NE**. Zaokružiti tačan odgovor.

14. $\rho = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (1, 4), (4, 5), (1, 5), (2, 3), (2, 5), (3, 5)\}$ je relacija poretka skupa $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$: **DA** NE, i ako jeste, nacrtati njen Haseov dijagram. Odrediti minimalne: $1, 2$, maksimalne: 5 , najveći element: 5 i najmanji element: 1 .

Haseov dijagram



15. Napisati normalizovani polinom $P(x)$ nesvodljiv nad poljem $\mathbb{R}$ i nesvodljiv nad poljem $\mathbb{C}$ čiji zbir koeficijenata je 2015. $P(x) = \underline{x^2 - 2014x + 1}$

16. Koje jednakosti su tačne za sve $z \in \mathbb{C}$ i sve $\varphi \in (-\pi, \pi]$ za koje su i definisane: 1) $e^{-i\varphi} = e^{-i\varphi}$ 2) $e^{-i\varphi} = e^{i\varphi}$ 3) $e^{i(\arg z - \arg z^{-1})} = z^2 |z|^{-2}$ 4) $e^{i(\arg z + \arg z^{-1})} = 1$ 5) $1 = z \bar{z} |z|^{-2}$ 6) $\arg z > 0 \Leftrightarrow \arg z - \arg(-z) = \pi$

17. U skupu kompleksnih brojeva je: 1) $z \bar{z} = |z|^2$ 2) $z = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \Rightarrow z^{-1} = \bar{z}$ 3) $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$ 4) $\operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$ 5) $\overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$ 6) $|z| = 1 \Leftrightarrow z^{-3} = \bar{z}^3$ 7) $|z_1 - z_2| \geq |z_1| + |z_2|$ 8) $|z_1| |z_2| = |z_2| |z_1| \Leftrightarrow \arg z_1 = \arg z_2$

18. Neka je A najveći podskup od $\mathbb{R}$ a B najmanji podskup skupa $\mathbb{R}$ za koje je funkcija $f: A \rightarrow B$ definisana sa $f(x) = 2 \arctg x$. Tada $A = \underline{\mathbb{R}}$, $f(\underline{1}) = \underline{\frac{\pi}{2}}$, $f(\underline{0}) = \underline{0}$ i $B = \underline{(-\pi, \pi)}$. Funkcija $f: A \rightarrow B$ je:

- 1) surjektivna i neinjektivna 2) injektivna i nesurjektivna 3) ni injektivna ni surjektivna 4) bijektivna 5) $f^{-1}(x) = \underline{\frac{1}{2} \arctan \frac{x}{2}}$. Ako $f^{-1}: O \rightarrow S$, tada je $O = \underline{(-\pi, \pi)}$, $S = \underline{\mathbb{R}}$

19. Za kompleksni broj $z = e^{i\frac{\pi}{3}} - e^{i\frac{\pi}{6}}$, naći:

$$\operatorname{Re}(z) = \underline{\frac{\sqrt{3}-1}{2}}, \operatorname{Im}(z) = \underline{\frac{\sqrt{3}-1}{2}}, |z| = \underline{\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}}, \arg(z) = \underline{-\frac{\pi}{4}}, \bar{z} = \underline{\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2} e^{-i\frac{\pi}{4}}}, z^2 = \underline{\frac{4-\sqrt{2}}{2} e^{-i\frac{\pi}{2}}}$$

20. Neka je $A = \{1, 2, 3, 4\}$ i $B = \{1, 2, 3\}$. Odrediti broj elemenata sledećih skupova funkcija ako f označava rastuću funkciju f i $f \nearrow$ označava neopadajuću funkciju f :

$$\begin{aligned} |\{f|f: A \rightarrow B\}| &= 81, |\{f|f: A \xrightarrow{1-1} B\}| = 0, |\{f|f: A \rightarrow B \wedge f \nearrow\}| = 0, |\{f|f: B \xrightarrow{na} B\}| = 6 \\ |\{f|f: B \rightarrow A\} \wedge f \nearrow| &= 4, |\{f|f: A \xrightarrow{1-1} A\}| = 24, |\{f|f: B \rightarrow A \wedge f \nearrow\}| = 20, |\{f|f: B \rightarrow A\}| = 64 \end{aligned}$$

21. Neka su $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ i $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definisane sa $f(x) = 2x + 1$ i $g(x) = \sqrt[5]{x}$. Izračunati:
- 1) $f^{-1}(x) = \frac{x-1}{2}$ 2) $g^{-1}(x) = x^5$ 3) $(f \circ g)(x) = 2\sqrt[5]{x} + 1$ 4) $(f \circ g)^{-1}(x) = \sqrt[5]{\frac{x-1}{2}}$ 5) $(g^{-1} \circ f^{-1})(x) = \left(\frac{x-1}{2}\right)^5$
22. Zaokružiti brojeve ispred tvrđenja koja su tačna u Bulovoj algebri $B = (\{0, 1\}, +, \cdot, ', 0, 1)$.
- 1) $x = xy + xy'$ 2) $xx' = (x + 1)'$ 3) $xx = x + x$ 4) $xy = x + y$ 5) $xy = 1 \Rightarrow x = 1$
 - 6) $xy = 0 \Rightarrow (x = 0 \vee y = 0)$ 7) $(x = 0 \vee y = 0) \Rightarrow xy = 0$
 - 8) $(\forall x \in B)(\exists y \in B) x + y = 1 \wedge xy = 0$
23. Zaokružiti slova (ili slovo) ispred struktura koje su prsteni a nisu polja: 1) $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ 2) $(\mathbb{Z}_4, +, \cdot)$ 3) $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ 4) $(\mathbb{Z}_3, +, \cdot)$ 5) $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ 6) $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ 7) $(\mathbb{R}[t], +, \cdot)$ 8) $(\mathbb{R}^+, +, \cdot)$
24. Zaokružiti oznaku polja za koje važi da je polinom $t^3 + t^2 + 1$ svodljiv nad njima. $\mathbb{Q}$ $\mathbb{R}$ $\mathbb{C}$ $\mathbb{Z}_2$ $\mathbb{Z}_3$
25. $f \in \mathbb{R}[x]$ i $f(2-i) = 0$. Zaokružiti tačno: 1) $x - 2 + i \mid f(x)$ 2) $x - 2 - i \mid f(x)$ 3) $x - e^i \mid f(x)$ 4) $x^2 + 4x + 5 \mid f(x)$ 5) $x + 2 + i \mid f(x)$ 6) $x^2 - 4x + 5 \mid f(x)$ 7) $x - e^{-i} \mid f(x)$
26. Neka je $z = 1$, $u = 2i$ i $w = 2 + 3i$. Rotacijom tačke z oko tačke w za ugao $\frac{\pi}{2}$ dobija se tačka $5 + 2i$, translacijom tačke z za vektor w dobija se tačka $3 + 3i$, $\angle zwu = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$.
27. Neka je $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$, $f_1 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 1), (4, 2)\}$, $f_2 = \{(1, 1), (2, 2)\}$, $f_3 = \{(1, 4), (2, 1)\}$, $f_4 = \{(1, 3), (2, 3)\}$ Popuniti sa da ili ne ili -.

$\backslash$	f_i je funkcija	$f_i: A \rightarrow B$	$f_i: B \rightarrow A$	$f_i: A \xrightarrow{1-1} B$	$f_i: A \xrightarrow{na} B$	$f_i: A \xrightarrow{1-1}_{na} B$
f_1	da	ne	da	ne	ne	ne
f_2	da	da	ne	da	ne	ne
f_3	da	da	ne	ne	ne	ne
f_4	da	da	ne	ne	ne	ne

28. Neka su 1, 2 i 4 svi koreni polinoma P koji je definisan sa $P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ nad poljem $\mathbb{C}$. Odrediti koeficijent uz x^3 u polinomu $P(x)$: $a \in \{-8, -9, -11\}$.

KOLOKVIJUM 1, PRIMER 17

1. Za relaciju $<$ u skupu celih brojeva $\mathbb{Z}$ zaokružiti ona slova koja označavaju svojstvo relacije koju ona poseduje: R -refleksivnost, S -simetričnost, A -antisimetričnost, T -tranzitivnost: R S A T F
2. Neka je f funkcija definisana sa $f = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \end{pmatrix}$ i $g = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \end{pmatrix}$. Tada je:
- $$f^{-1} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \end{pmatrix}, \quad f \circ g = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & c \end{pmatrix}, \quad (f \circ g)^{-1} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & c \end{pmatrix}, \quad g^{-1} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \end{pmatrix}, \quad g^{-1} \circ f^{-1} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \end{pmatrix}.$$
3. Zaokružiti brojeve ispred tvrđenja koja su tačna u svakoj Bulovoj algebri $(B, +, \cdot, ', 0, 1)$:
- 1) $(a')' = a'$ 2) $a + a' = 0$ 3) $a \cdot 0 = 0$ 4) $1 + a = a$ 5) $(a + b)' = a' + b'$
4. Zaokružiti slova (ili slovo) ispred struktura koja su grupe:
- 1) $(\mathbb{Z} \setminus \{0\}, \cdot)$ 2) $(\mathbb{R}, \cdot)$ 3) $(\mathbb{N}, +)$ 4) $(\mathbb{N} \cup \{0\}, +)$ 5) $(\mathbb{N}, \cdot)$
5. Zaokružiti broj (ili brojeve) ispred tvrđenja koja su tačna u svakom prstenu $(P, +, \cdot)$:
- 1) $a + bc = (a + b)(a + c)$ 2) $(P, +)$ je asocijativni grupoid 3) $(P, +)$ je asocijativni grupoid sa neutralnim elementom 4) operacija $+$ je komutativna 5) operacija $\cdot$ je komutativna
6. Za kompleksne brojeve $z_1 = 1 + i$ i $z_2 = -2 - 2i$ izračunati
- $$z_1 + z_2 = -1 - i \quad z_1 \cdot z_2 = -4i \quad \frac{z_1}{z_2} = -\frac{1}{2} \quad \arg(z_2) = -\frac{3\pi}{4} \quad |z_2| = 2\sqrt{2}$$
7. Ako za polinome p i q važi $dg(p) = 5$ i $dg(q) = 2$, tada je $dg(p^2) = 10$ i $dg(p + q) = 5$.

8. Zaokružiti brojeve ispred injektivnih funkcija:

1) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 3 - x$

2) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$

3) $f: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty), f(x) = x^2$

4) $f: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty), f(x) = x^2$

5) $f: (0, \frac{\pi}{2}) \rightarrow (0, \infty), f(x) = \tan x$

6) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = e^x$

9. Za svaku injektivnu funkciju f postoje skupovi A i B , takvi da je funkcija $f: A \rightarrow B$ bijektivna?

1) uvek

2) nikada

3) samo pod još nekim uslovima

10. Neka je $f: S \rightarrow S$ i $(\forall x \in S) f(f(x)) = x$. Tada je $f: S \rightarrow S$ surjekcija. DA NE

11. Neka su ρ_i relacije skupa $\mathbb{R}$: $\rho_1 = \{(x, x+1) | x \in \mathbb{R}\}$, $\rho_2 = \{(x, y) | x \in \mathbb{R}, y \in [x-1, x+1]\}$,
 $\rho_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x \geq 0 \wedge y \geq 0\}$, $\rho_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y^2 = x^2\}$,

Iza oznake svake od tih relacija zaokružiti samo ona slova koja označavaju svojstvo relacije koju ona poseduje: R- refleksivnost, S- simetričnost, A- antisimetričnost, T- tranzitivnost.

$\rho_1: \text{R S A T F}$ $\rho_2: \text{R S A T F}$ $\rho_3: \text{R S A T F}$ $\rho_4: \text{R S A T F}$

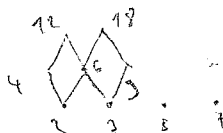
12. Ispitati da li relacija „deli” skupa $A = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 12, 18\}$ jeste relacija poretka. DA NE (zaokruži), i ako jeste, nacrtati Haseov dijagram, i napisati

minimalne el. $\{5, 7, 2, 3\}$

maksimalne el. $\{5, 7, 12, 18\}$

najveći el. $\{ \}$

najmanji el. $\{ \}$



13. U Bulovoj algebri $B = (B, +, \cdot, ', 0, 1)$ važi:

a) $xy = 1 \Rightarrow y = 1$

b) $x = y \Rightarrow x' = y'$

c) $x + y = x'y'$

d) $xy = (x' + y)'$

e) $x' = y' \Rightarrow x = y$

f) $f(x) = x' \Rightarrow f: B \rightarrow B$

14. Za funkciju $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ iz grupe $(\mathbb{R}, +)$ u grupu $((0, \infty), \cdot)$, definisanu sa $f(x) = 2^x$, važi: 1) f je homomorfizam 2) f je izomorfizam 3) f^{-1} postoji i f^{-1} je homomorfizam 4) f^{-1} postoji i f^{-1} je izomorfizam 5) ništa od prethodno navedenog

15. Zaokružiti podgrupe grupe $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$: 1) $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, +)$ 2) $((0, \infty), \cdot)$ 3) $((-\infty, 0), \cdot)$ 4) $(\mathbb{N}, \cdot)$ 5) $(\mathbb{Z} \setminus \{0\}, \cdot)$ 6) $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, +)$ 7) $((0, 1), \cdot)$ 8) $(\{-1, 1\}, \cdot)$

16. Da li su sledeći uređeni parovi grupoidi sa neutralnim elementom:

a) $(\mathbb{N}, +)$

b) $(\mathbb{N}, \cdot)$

c) $(\mathbb{N}, -)$

d) $(\mathbb{Z}, -)$

e) $(\mathbb{Z}, \cdot)$

f) $(\mathbb{Z} \setminus \{0\}, \cdot)$

g) $(\mathbb{R}, :)$

h) $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, :)$

17. Ako je $f: G \rightarrow H$ izomorfizam grupoda $(G, +)$ sa neutralnim elementom 0 u grupoid $(H, \cdot)$ sa neutralnim elementom 1, tada je: 1) $f(0) = 1$ 2) $f(-a) = a$ 3) $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$

18. Navesti 4 beskonačna polja: $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, $(\mathbb{C}, +, \cdot)$, $(\{a+bs | a, b \in \mathbb{Q}\}, +, \cdot)$

19. U polju $\mathbb{Z}_7$ izračunati $3(2^3 + 5)^{-1} + 6 = 3$

20. U polju $\mathbb{Z}_5$, skup rešenja po $x \in \mathbb{Z}_5$ jednačine $x^2 + 4(x^{-1} + 2x + 1) = 3$ je $\{4\}$

21. Ako je $|z| = 1$ tada je: 1) $z = \bar{z}$ 2) $\arg z = \arg \bar{z}$ 3) $z^{-1} = z$ 4) $|z| = |\bar{z}|$ 5) $z^{-1} = \bar{z}$ 6) $|\arg z| = |\arg \bar{z}|$

22. 1) $\arg z \geq 0 \Leftrightarrow (I_m(z) \geq 0 \wedge z \neq 0)$ 2) $\arg z \geq 0 \Leftrightarrow (R_e(z) \geq 0 \wedge z \neq 0)$

3) $|z| > 1 \Rightarrow |\arg(z)| = |\arg(\bar{z})|$ 4) $|z| = 1 \Rightarrow z\bar{z} = |z|$

23. $\arg(e^{i\frac{\pi}{6}} - e^{-i\frac{\pi}{6}}) = \frac{\pi}{2}$, $|e^{i\frac{\pi}{6}} - e^{-i\frac{\pi}{6}}| = 1$, $R_e(e^{i\frac{\pi}{6}} - e^{-i\frac{\pi}{6}}) = 0$, $I_m(e^{i\frac{\pi}{6}} - e^{-i\frac{\pi}{6}}) = 1$

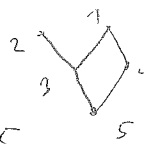
24. Zaokružiti polja nad kojima je polinom $t^3 + t + 1$ svodljiv: $\mathbb{Q}$ $\mathbb{R}$ $\mathbb{C}$ $\mathbb{Z}_2$ $\mathbb{Z}_3$

25. Skup svih mogućih stepena nesvodljivih polinoma nad poljem realnih brojeva $\mathbb{R}$ je $\{1, 2\}$

26. U prstenu polinoma, za svaki polinom p važi: 1) ako je p jednak proizvodu dva polinoma, tada je p svodljiv 2) ako je $p = 0$, tada je on svodljiv 3) ako je $p \neq 0$, tada je on nesvodljiv 4) ako je p svodljiv, tada je $p \neq 0$ i $dg(p) \neq 0$ i p je jednak proizvodu dva polinoma stepena većeg od 0 5) ako je $p \neq 0$ i $dg(p) \neq 0$ i p je jednak proizvodu dva polinoma stepena većeg od 0, tada je p je svodljiv

27.

- Da li je $\rho = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (3,2), (5,2), (5,1), (5,3), (5,4), (4,1), (3,1)\}$ relacija poretka skupa $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$: DA NE, i ako jeste, nacrtati Haseov dijagram, odrediti minimalne: 5 , maksimalne: $2, 7$, najveći: 7 najmanji: 5 element.



28.

- Neka je funkcija $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ definisana sa $f(x) = 2^x$. Tada je: ~~1) $f^{-1}(x) = x^2$~~ , ~~2) $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$~~ , 3) $f^{-1}(x) = \log_2 x$, ~~4) $f^{-1}(x) = 2^{-x}$~~ , ~~5) $f^{-1}(x) = \frac{2}{x}$~~ , 6) $f^{-1}(x) = \log_{\frac{1}{2}} x^{-1}$, ~~7) $f^{-1}(x) = -\log_2 \frac{1}{x}$~~ .

29.

- Neka su $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ i $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definisane sa $f(x) = 2x + 1$ i $g(x) = x^5$. Izračunati:

1) $f^{-1}(x) = \frac{x-1}{2}$ 2) $g^{-1}(x) = \sqrt[5]{x}$ 3) $(f \circ g)(x) = 2x^5 + 1$
 4) $(g^{-1} \circ f^{-1})(x) = \sqrt[5]{\frac{x-1}{2}}$ 5) $(f \circ g)^{-1}(x) = \sqrt[5]{\frac{x-1}{2}}$

30.

- Bijektivne funkcije su: 1) $f: \mathbb{R}^- \rightarrow \mathbb{R}^-$, $f(x) = -x^2$ ~~2) $f: [-1, 1] \rightarrow [-\pi, \pi]$, $f(x) = \arcsin x$~~
3) $f: [\frac{\pi}{2}, \pi] \rightarrow [-1, 0]$, $f(x) = \cos x$ ~~4) $f: [-3, 0] \rightarrow [-8, 1]$, $f(x) = 1 - x^2$~~
5) $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x^7$

31.

- Zaokružiti brojeve ispred tvrdjenja koja su tačna u svakoj Bulovoj algebri $(B, +, \cdot, ', 0, 1)$:

1) $a + a' = (a \cdot a')' = 1$ 2) $(aa')' = 0'$ 3) $a + 1' = (a')'$ 4) $1 + a' = (1')'$ 5) $a + b = (a'b')'$

- Skup kompleksnih rešenja jednačine $x = \sqrt[3]{-8}$ je $S = \{ -2, 2e^{i\frac{2\pi}{3}}, 2e^{-i\frac{2\pi}{3}} \}$.

32.

- Za kompleksni broj $z = e^{-i\frac{\pi}{2}} + e^{i\frac{\pi}{6}}$, naći:
 $Re(z^2) = \frac{1}{2}$, $Im(z^2) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $|z| = 1$, $\arg(z) = -\frac{\pi}{6}$, $\bar{z} = e^{i\frac{\pi}{6}}$, $z^3 = e^{-i\frac{\pi}{2}}$.

33.

- Napisati u eksponencijalnom obliku, odnosno obliku $\rho e^{i\varphi}$, $\rho \in [0, \infty)$, $\varphi \in (-\pi, \pi]$ ako je $\sqrt[3]{-}$ kompleksni:
 $-2^{-2} = \frac{1}{4} e^{i\pi}$, $(\sqrt[3]{1})^3 = e^{i\pi}$, $\sqrt[3]{1^3} \in \{ e^{i\frac{0}{3}}, e^{i\frac{2\pi}{3}}, e^{i\frac{4\pi}{3}} \}$, $-1 + i = \sqrt{2} e^{i\frac{3\pi}{4}}$, $\frac{\pi}{3} \cdot (3i) = \pi e^{i\frac{\pi}{2}}$, $\frac{\pi}{3}(-i) = \frac{\pi}{3} e^{-i\frac{\pi}{2}}$

KOLOKVIJUM 1, PRIMER 18

1.

- Za relaciju ekvivalencije $\rho = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (1,2), (2,1), (3,4), (4,3)\}$ particija $\mathcal{P}$ skupa $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ koja joj odgovara je $\mathcal{P} = \{ \{1, 2\}, \{3, 4\}, \{5\} \}$.

2.

- Neka su funkcije $f, g: (-1, 0) \rightarrow (-1, 0)$ definisane sa $f(x) = -\sqrt{x+1}$ i $g(x) = x^2 - 1$. Tada je

$f^{-1}(x) = x^2 - 1$, $(f \circ g)(x) = x^2$, $(f \circ g)^{-1}(x) = \sqrt{x}$, $g^{-1}(x) = -\sqrt{x+1}$, $(g^{-1} \circ f^{-1})(x) = x^2$.

3.

- U svakoj Bulovoj algebri $(B, +, \cdot, ', 0, 1)$ tačno je: 1) $ab = 1 \Rightarrow a = 1 \wedge b = 1$ 2) $(a')' = a \cdot 1$
~~3) $a + a' = 1'$~~ ~~4) $a \cdot 1' = a$~~ 5) $1 + a = 0'$ ~~6) $a + b = (a' + b)'$~~

4.

- Zaokružiti broj (ili brojeve) ispred struktura koja su asocijativni grupoidi sa neutralnim elementom:

1) $(\mathbb{Z} \setminus \{0\}, \cdot)$ 2) $(\mathbb{R}, \cdot)$ ~~3) $(\mathbb{N}, +)$~~ 4) $(\mathbb{N} \cup \{0\}, +)$ 5) $(\{1, 0, -1\}, \cdot)$

5.

- Zaokružiti broj (ili brojeve) ispred tvrdjenja koja su tačna u svakom polju $(F, +, \cdot)$:

~~1) $a + bc = (a + b)(a + c)$~~ ~~2) $(F, \cdot)$ je grupa~~ 3) $(F, +)$ je komutativna grupa ~~4) $(F \setminus \{0\}, +)$ je grupa~~
5) operacija $\cdot$ je komutativna

6.

- Za kompleksne brojeve $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$ i $z_2 = 1 - i\sqrt{3}$ izračunati: $|\frac{z_1}{z_2}| = 1$, $\arg \frac{z_1}{z_2} = \frac{2\pi}{3}$
 $z_1 + z_2 = 2$, $z_1 \cdot z_2 = 4$, $(\frac{z_1}{z_2})^3 = 1$, $\arg(z_2) = -\frac{\pi}{3}$, $|z_2| = 2$

7.

- Ako za polinome p i q važi $p + q \neq 0$, $dg(p) = 2$ i $dg(q) = 2$, tada je

$dg(p^2) \in \{ 4 \}$, $dg(p + q) \in \{ 0, 1, 2 \}$

8.

- Zaokružiti brojeve ispred surjektivnih funkcija:

1) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3 - x$ 2) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ 3) $f: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$, $f(x) = x^2$
4) $f: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, $f(x) = x^2$ 5) $f: (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow (-\infty, \infty)$, $f(x) = \tan x$ ~~6) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$~~

9. Za svaku injektivnu funkciju $f: A \rightarrow B$ postoji skup $C \subseteq B$ takv da je funkcija $f: A \rightarrow C$ bijektivna?
 1) uvek 2) nikada 3) samo pod još nekim uslovima

10. Neka je $f: S \rightarrow S$ i $(\forall x \in S) f(f(x)) = x$. Tada je $f: S \rightarrow S$: 1) injektivna 2) surjektivna 3) bijektivna.

11. Neka su ρ_i relacije skupa $\mathbb{R}$:
 $\rho_1 = \{(2, 5), (5, 7), (2, 7)\}$, $\rho_2 = \{(x, y) | x^2 + y^2 = 1 \wedge x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R}\}$,
 $\rho_3 = \{(x^2, x) | x \in \mathbb{R}\}$, $\rho_4 = \{(x, y) | x^2 = y^2 \wedge x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R}\}$, $\rho_5 = \{(|x|, x) | x \in \mathbb{R}\}$,
 $\rho_6 = \{(1, 2), (2, 1), (1, 3)\}$.

Iza oznake svake od tih relacija zaokružiti samo ona slova koja označavaju svojstvo relacije koju ona poseduje: R- refleksivnost, S- simetričnost, A- antisimetričnost, T- tranzitivnost, F- funkcija.

$\rho_1: \text{R} \text{S} \text{A} \text{T} \text{F}$ $\rho_2: \text{R} \text{S} \text{A} \text{T} \text{F}$ $\rho_3: \text{R} \text{S} \text{A} \text{T} \text{F}$ $\rho_4: \text{R} \text{S} \text{A} \text{T} \text{F}$ $\rho_5: \text{R} \text{S} \text{A} \text{T} \text{F}$ $\rho_6: \text{R} \text{S} \text{A} \text{T} \text{F}$

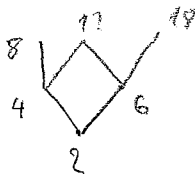
12. Ispitati da li relacija „deli” skupa $A = \{2, 4, 6, 12, 8, 18\}$ jeste relacija poretka: DA NE (zaokruži), i ako jeste, nacrtati Haseov dijagram, i napisati

minimalne el. $\{2\}$

maksimalne el. $\{8, 12, 18\}$

najveći el. $\{18\}$

najmanji el. $\{2\}$



13. U Bulovoj algebri $B = (B, +, \cdot, ', 0, 1)$ važi: 1) $x + y = x'y'$ 2) $xy = (x' + y)'$ 3) $xy = 1 \Rightarrow x + y = 1$
 4) $x + y = 1 \Leftrightarrow xy = 1$ 5) $x = y \Rightarrow x' = y'$ 6) $x' = y' \Rightarrow x = y$ 7) $f(x) = x' \Rightarrow f: B \rightarrow B$ na

14. Za funkciju $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ grupe $((0, \infty), \cdot)$ u grupu $(\mathbb{R}, +)$, definisanu sa $f(x) = -\log_3 x$ važi da je:
 1) homomorfizam 2) izomorfizam 3) f^{-1} homomorfizam 4) f^{-1} funkcija 5) f^{-1} izomorfizam

15. Zaokružiti broj (ili brojeve) ispred tvrdjenja koja su tačna u svakom prstenu $(R, +, \cdot)$:
 1) $(b + c)a = ca + ba$ 2) $(b + c)a = ca + ab$ 3) $(R, +)$ je grupa 4) $(R, \cdot)$ je asocijativni gpoid
 5) $ab = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee b = 0$ 6) operacija $\cdot$ je distributivna prema operaciji $+$ 7) $a \neq 0 \wedge b \neq 0 \Rightarrow ab \neq 0$
 8) $a \cdot 0 = 0$ 9) $a \cdot (-a) = -a^2$

16. Neka je $g: [-1, 0] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = -\sqrt{1 - x^2}$, inverzna funkcija je
 $g^{-1}(x) = \frac{-\sqrt{1-x^2}}{x}$, $g^{-1}: A \rightarrow \mathbb{R}$, $A = [-1, 0]$

17. Neka je funkcija $f: \mathbb{R} \setminus \{2\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{2\}$ definisana sa $f(x) = \frac{2x}{x-2}$. Tada je: a) $f^{-1}(x) = \frac{2x}{x-2}$

18. Neka je funkcija $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ definisana sa $f(x) = 2x^{-5}$. Tada je:

$$f^{-1}(x) = \sqrt[5]{\frac{2}{x}}, \quad (f \circ f)(x) = \frac{x^{25}}{16}, \quad f(x+1) = 2(x+1)^{-5}, \quad f\left(\frac{1}{x}\right) = 2x^5$$

19. Neka je A najveći podskup od $\mathbb{R}$ a B najmanji podskup skupa $\mathbb{R}$ za koje je $f: A \rightarrow B$ definisana sa
 $f(x) = \arccos(x+1)$. Tada je $A = [-2, 0]$, $f\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$, $f\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$ i $B = [0, \pi]$, a $f: A \rightarrow B$ je: a) bijektivna b) surjektivna ali ne injektivna g) injektivna ali ne surjektivna d) niti injektivna niti surjektivna

20. Napisati 4 beskonačna prstena: $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, $(\mathbb{C}, +, \cdot)$, $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$

21. U polju $(\mathbb{Z}_3, +, \cdot)$, skup rešenja po $x \in \mathbb{Z}_3$ jednačine $x^2 + 2(x^{-1} + 2x + 1) = 0$ je $\{1, 2\}$

22. Zaokružiti brojeve koji su koreni odgovarajućih jednačina:

$$z \in \{0, 1, e^{i\frac{2\pi}{3}}, e^{-i\frac{2\pi}{3}}\} \Rightarrow z^2 = \bar{z}$$

$$z \in \{0, 1, e^{i\frac{2\pi}{3}}, e^{-i\frac{2\pi}{3}}\} \Rightarrow z^3 = |z|$$

$$z \in \{0, 1, e^{i\frac{2\pi}{3}}, e^{-i\frac{2\pi}{3}}\} \Rightarrow z^4 = z$$

$$z \in \{0, 1, e^{i\frac{2\pi}{3}}, e^{-i\frac{2\pi}{3}}\} \Rightarrow z^3 = 1.$$

23. Ako je $z \neq 0$ tada je: 1) $ze^{-2i \arg z} = \bar{z}$ 2) $\arg z = \arg \bar{z}$ 3) $|z| = |\bar{z}|$ 4) $|z|^{-2} = \bar{z}^{-1}$ 5) $|\arg z| = |\arg \bar{z}|$

24. $\arg(e^{i\frac{\pi}{4}} - e^{-i\frac{\pi}{4}}) = \frac{\pi}{2}$, $|e^{i\frac{\pi}{4}} - e^{-i\frac{\pi}{4}}| = \sqrt{2}$, $\operatorname{Re}(e^{i\frac{\pi}{4}} - e^{-i\frac{\pi}{4}}) = 0$, $\operatorname{Im}(e^{i\frac{\pi}{4}} - e^{-i\frac{\pi}{4}}) = \sqrt{2}$.

25. Zaokružiti polja nad kojima je polinom $t^2 + t + 1$ nesvodljiv: $\mathbb{Q}$ $\mathbb{R}$ $\mathbb{C}$ $\mathbb{Z}_2$ $\mathbb{Z}_3$

16.

Skup svih mogućih stepena nesvodljivih i svodljivih polinoma nad poljem realnih brojeva $\mathbb{R}$ je $\{ 2 \}$

U prstenu polinoma, za svaki polinom p važi: 1) ako je p jednak proizvodu dva polinoma, tada je p svodljiv 2) ako je $p = 0$, tada je on svodljiv 3) ako je $p = 0$, tada je on nesvodljiv 4) ako je p svodljiv tada je $p \neq 0$ i $dg(p) \neq 0$ i p je jednak proizvodu dva polinoma stepena većeg od 0 5) ako je p jednak proizvodu dva polinoma stepena većeg od 0, tada je p svodljiv

19.

Neka su $A = \{1, 2, 3\}$ i $B = \{2, 3, 4\}$ i neka je $f_1 = \{(1, 3), (2, 4)\}$, $f_2 = \{(1, 3), (3, 4), (2, 3)\}$, $f_3 = \{(3, 3), (2, 2), (1, 4)\}$, $f_4 = \{(3, 3), (2, 3), (1, 3)\}$. Popuniti obavezno sa da ili ne:

$\backslash$	f_i je funkcija	$f_i: A \rightarrow B$	$f_i: A \xrightarrow{1-1} B$	$f_i: A \xrightarrow{na} B$	$f: A \xrightarrow{1-1}_{na} B$	f_i je rastuća funkcija
f_1	da	ne	ne	ne	ne	da
f_2	da	da	ne	ne	ne	ne
f_3	da	da	da	ne	da	ne
f_4	da	da	ne	ne	ne	ne

19.

Neka je $A = \{1, 2, 3\}$ i $B = \{1, 2, 3, 4\}$. Odrediti broj elemenata sledećih skupova funkcija:

$$\begin{aligned} |\{f|f: A \rightarrow B\}| &= 64 \quad |\{f|f: A \xrightarrow{1-1} B\}| = 24 \quad |\{f|f: A \rightarrow B \wedge f \nearrow\}| = 4 \quad |\{f|f: B \xrightarrow{na} B\}| = 24 \\ |\{f|f: B \rightarrow A\}| &= 27 \quad |\{f|f: A \xrightarrow{1-1} A\}| = 6 \quad |\{f|f: B \rightarrow A \wedge f \nearrow\}| = 15 \quad |\{f|f: A \xrightarrow{na} A\}| = 6 \end{aligned}$$

19.

Neka je f funkcija definisana sa $f = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & c & b \end{pmatrix}$. Tada je

$$f^{-1} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & c & b \end{pmatrix}, \quad g = f \circ f = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & c \end{pmatrix}, \quad h = g \circ f = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & c & b \end{pmatrix}$$

a) $(\{f, g, h\}, \circ)$ je grupoid; b) $(\{f, g, h\}, \circ)$ je asocijativan grupoid; c) $(\{f, g, h\}, \circ)$ je komutativan grupoid; d) $(\{f, g, h\}, \circ)$ je asocijativan grupoid sa neutralnim elementom; e) $(\{f, g, h\}, \circ)$ je grupa.

19.

Skup kompleksnih rešenja jednačine $x = \sqrt[4]{-4}$ je $S = \{ \sqrt[4]{4} e^{i\frac{\pi}{4}}, \sqrt[4]{4} e^{i\frac{3\pi}{4}}, \sqrt[4]{4} e^{i\frac{5\pi}{4}}, \sqrt[4]{4} e^{i\frac{7\pi}{4}} \}$.

19.

Za kompleksni broj $z = 1 + e^{i\frac{\pi}{6}}$, naći:

$$Re(z^2) = \frac{\sqrt{3}+1}{2}, \quad Im(z^2) = \frac{2+\sqrt{3}}{2}, \quad |z| = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}, \quad \arg(z) = \frac{\pi}{12}, \quad \bar{z} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2} e^{-i\frac{\pi}{12}}, \quad z^3 = \frac{(\sqrt{2}+\sqrt{6})^3}{64} e^{i\frac{3\pi}{4}}$$

19.

Napisati u eksponencijalnom obliku, odnosno obliku $\rho e^{i\varphi}$, $\rho \in [0, \infty)$, $\varphi \in (-\pi, \pi]$ ako je $\sqrt[3]{-2}$ kompleksni:

$$-2^{-2} = \frac{1}{4} e^{i\pi}, \quad (\sqrt[3]{1})^3 = e^{i\pi}, \quad \sqrt[3]{1^3} \in \{ e^{i\frac{\pi}{3}}, e^{i\frac{2\pi}{3}}, e^{i\frac{4\pi}{3}} \}, \quad -1+i = \sqrt{2} e^{i\frac{3\pi}{4}}, \quad (3i) = 3 e^{i\frac{\pi}{2}}, \quad \frac{\pi}{3}(-i) = \frac{\pi}{3} e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

KOLOKVIJUM 1, PRIMER 19

1.

Funkcija $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2^x$ je:

1) surjektivna ali ne injektivna

2) injektivna ali ne surjektivna

3) niti injektivna niti surjektivna

4) bijektivna

2.

Funkcija $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x-1)^9$ je:

1) surjektivna ali ne injektivna

2) injektivna ali ne surjektivna

3) niti injektivna niti surjektivna

4) bijektivna

3.

U Bulovoj algebri su tačna tvrđenja

$$1) a + ab = a \cdot 1' \quad 2) 1 + 1 = 1 \quad 3) 1 \cdot 0' = 1 \quad 4) a + b = (a'b')' \quad 5) a' \cdot b' = (a' + b')'$$

4.

Od sledećih struktura, grupe su

$$1) (\mathbb{Z}, +) \quad 2) (\{-1, 0, 1\}, +) \quad 3) (\{-1, 1\}, \cdot) \quad 4) (\mathbb{Z}_6 \setminus \{0\}, \cdot) \quad 5) (\mathbb{Z}_5 \setminus \{0\}, \cdot) \quad 6) (\{-1, 0, 1\}, \cdot)$$

5.

Neka su $f: (-\infty, 0) \rightarrow (-\infty, 0)$ i $g: (-\infty, 0) \rightarrow (-\infty, 0)$ definisane sa $f(x) = \frac{1}{x}$ i $g(x) = -\sqrt{-x}$. Izračunati:

$$\begin{aligned} 1) f^{-1}(x) &= \frac{1}{x} & 2) g^{-1}(x) &= -x^2 & 3) (f \circ g)(x) &= -\frac{1}{\sqrt{-x}} \\ 4) (g \circ f)(x) &= -\sqrt{-\frac{1}{x}} & 5) (g^{-1} \circ f^{-1})(x) &= -\frac{1}{x^2} & 6) (f \circ g)^{-1}(x) &= -\frac{1}{x^2} \end{aligned}$$

6.

U Bulovoj algebri $(B, +, \cdot, ', 0, 1)$ tačna su tvrđenja

$$1) a + a' = (a \cdot a')' = 1 \quad 2) (aa')' = 0' \quad 3) a + 1' = (a')' \quad 4) 1 + a' = (1')' \quad 5) a + b = (a'b')'$$

7. ☒ NZD(P,Q) za polinome $P = (t-3)^4(t+7)^2(t-1)^5(t+13)^3$ i $Q = (t-3)^2(t-15)(t-1)^7(t+13)^5$ je polinom

- a) $(t-3)^4(t-1)^7(t+13)^5$ b) $(t-3)(t-1)(t+13)$ c) $(t-3)^4(t+7)^2(t-1)^7(t+13)^5(t-15)$
d) $(t-3)(t+7)(t-1)(t+13)(t-15)$ e) $(t-3)^2(t-1)^5(t+13)^3$

8. ☒ Skup kompleksnih rešenja jednačine $x = \sqrt[4]{1}$ je $S = \{ 1, i, -1, -i \}$.

9. ☒ Za kompleksni broj $z = \pi$, naći:

$Re(z^2) = \pi^2$, $Im(z^2) = 0$, $|z| = \pi$, $\arg(z) = 0$, $\bar{z} = \pi$, $z^3 = \pi^3$

10. ☒ Za nenula polinome $p(x) = a^2x^2 + b$ i $q(x) = c^2x^2 + dx$ je

$dg(p) \in \{0, 1\}$, $dg(p \cdot q) \in \{1, 2, 3, 4\}$, $dg(p+q) \in \{1, 2\}$

11. ☒ Neka su funkcije $f, g: (-1, 0) \rightarrow (-1, 0)$ definisane sa $f(x) = -\sqrt{x+1}$ i $g(x) = x^2 - 1$. Tada je

$f^{-1}(x) = x^2 - 1$, $(f \circ g)(x) = x$, $(f \circ g)^{-1}(x) = x$, $g^{-1}(x) = -\sqrt{x+1}$, $(g^{-1} \circ f^{-1})(x) = x$

12. ☒ Broj n relacija skupa $A = \{1, 2, 3\}$ koje su refleksivne, simetrične, antisimetrične, tranzitivne i funkcije je $n = 1$

13. ☒ Zaokružiti brojeve ispred injektivnih funkcija: ① $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3 - x$

② $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x$ ③ $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - x$ ④ $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$

⑤ $f: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, $f(x) = x^2$ ⑥ $f: (0, \pi) \setminus \{\frac{\pi}{2}\} \rightarrow (-\infty, \infty)$, $f(x) = \tan x$

⑦ $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$

14. ☒ Za svaku injektivnu funkciju $f: A \rightarrow B$ postoji skup $C \subseteq B$ takv da je funkcija $f: A \rightarrow C$ bijektivna?

1) uvek

2) nikada

3) samo pod još nekim uslovima

15. ☒ Za svaku surjektivnu funkciju $f: A \rightarrow B$ postoji skup $C \subseteq A$ takv da je funkcija $f: C \rightarrow B$ bijektivna?

1) uvek

2) nikada

3) samo pod još nekim uslovima

16. ☒ Neka je funkcija $f: A \rightarrow A$ injektivna. Tada: ① f je surjektivna ② f je bijektivna ③ postoji f^{-1}

17. ☒ Neka je skup A konačan i $f: A \xrightarrow{1-1} A$. Tada: ① f je surjektivna ② f je bijektivna ③ postoji f^{-1}

18. ☒ Neka je $f: S \rightarrow S$ i $(\forall x \in S) f(f(x)) = x$. Tada je $f: S \rightarrow S$: ① injektivna ② surjektivna ③ bijektivna

19. ☒ Napisati bar jednu funkciju $f: S \rightarrow S$ za koju važi da je $(\forall x \in S) f(f(x)) = x$ (involucija tj. reflektor, odnosno $f \circ f = i_d$ ili $f = f^{-1}$), ako je $S = \{1, 2, 3, 4\}$. Napomena: i_d je identička funkcija, odnosno $(\forall x \in S) i_d(x) = x$.
 $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$. Koliko ih ima ukupno? 10

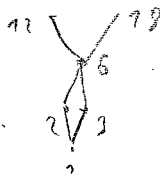
20. ☒ Ispitati da li relacija „deli” skupa $A = \{1, 2, 3, 6, 12, 18\}$ jeste relacija poretka: ☒ DA ☐ NE (zaokruži), i ako jeste, nacrtati Hasov dijagram, i napisati

minimalne el. $\{ 1 \}$

maksimalne el. $\{ 12, 18 \}$

najveći el. $\{ \}$

najmanji el. $\{ 1 \}$



21. ☒ U Bulovoj algebri $B = (B, +, \cdot, ', 0, 1)$ važi: ① $x + y = x'y'$ ② $xy = (x' + y')'$ ③ $xy = 1 \Rightarrow x + y = 1$
④ $x + y = 1 \Leftrightarrow xy = 1$ ⑤ $x = y \Rightarrow x' = y'$ ⑥ $x' = y' \Rightarrow x = y$ ⑦ $f(x) = x' \Rightarrow f: B \xrightarrow{na} B$

22. ☒ Za funkciju $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ grupe $(\mathbb{R}, +)$ u grupu $((0, \infty), \cdot)$, definisanu sa $f(x) = e^{-x}$ važi da je:

① homomorfizam ② izomorfizam ③ f^{-1} homomorfizam ④ f^{-1} funkcija ⑤ f^{-1} izomorfizam

23. ☒ Zaokružiti broj (ili brojeve) ispred tvrđenja koja su tačna u svakom polju $(R, +, \cdot)$: ① $(b+c)a = ab+ac$

② $(b+c)a = ca+ba$ ③ $(R, +)$ je grupa ④ $(R, \cdot)$ je asocijativni gpoid ⑤ $ab = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee b = 0$

⑥ operacija $+$ je distributivna prema operaciji $\cdot$ ⑦ $a \neq 0 \wedge b \neq 0 \Rightarrow ab \neq 0$ ⑧ $a \cdot 0 = a$

⑨ $a \cdot (-a) = -a^2$

24.

⊙ Neka je $g: [-1, 0] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = -\sqrt{4-4x^2}$, inverzna funkcija je

$$g^{-1}(x) = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, g^{-1}: A \rightarrow \mathbb{R}, A = [-1, 0]$$

25.

⊙ Neka je funkcija $f: \mathbb{R} \setminus \{2\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{1\}$ definisana sa $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$. Tada je: a) $f^{-1}(x) = \frac{1+x}{x-2}$

26.

⊙ Napisati 4 beskonačna prstena: $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$, $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, $(\mathbb{C}, +, \cdot)$

27.

⊙ U polju $(\mathbb{Z}_5, +, \cdot)$, skup rešenja po $x \in \mathbb{Z}_5$ jednačine $x^2 + 1 = 0$ je $\{2, 3\}$

28.

⊙ Ako je $z \neq 0$ tada je: ① $ze^{-2i \arg z} = \bar{z}$ ② $\arg z = \arg \bar{z}$ ③ $|z| = |\bar{z}|$ ④ $z|z|^{-2} = \bar{z}^{-1}$ ⑤ $|\arg z| = |\arg \bar{z}|$

29.

⊙ $\arg(e^{i\frac{\pi}{6}} - e^{-i\frac{\pi}{6}}) = \frac{\pi}{2}$, $|e^{i\frac{\pi}{6}} - e^{-i\frac{\pi}{6}}| = 1$, $Re(e^{i\frac{\pi}{6}} - e^{-i\frac{\pi}{6}}) = 0$, $Im(e^{i\frac{\pi}{6}} - e^{-i\frac{\pi}{6}}) = 1$

30.

⊙ Zaokružiti polja nad kojima je polinom $t^2 + 1$ nesvodljiv: $\mathbb{Q}$ $\mathbb{R}$ $\mathbb{C}$ $\mathbb{Z}_2$ $\mathbb{Z}_3$

31.

⊙ Skup svih mogućih stepena nesvodljivih polinoma nad poljem kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$ je $\{1\}$

32.

⊙ Neka su $A = \{1, 2, 3\}$ i $B = \{2, 3, 4\}$ i neka je $f_1 = \{(1, 3), (2, 4)\}$, $f_2 = \{(1, 3), (3, 4), (2, 3)\}$, $f_3 = \{(3, 3), (2, 2), (1, 4)\}$, $f_4 = \{(3, 3), (2, 3), (1, 3)\}$. Popuniti obavezno sa da ili ne:

$\backslash$	f_i je funkcija	$f_i: A \rightarrow B$	$f_i: A \xrightarrow{1-1} B$	$f_i: A \xrightarrow{na} B$	$f_i: A \xrightarrow{1-1}_{na} B$	f_i je rastuća funkcija
f_1	da	ne	ne	ne	ne	da
f_2	da	da	ne	ne	ne	ne
f_3	da	da	da	da	da	ne
f_4	da	da	ne	ne	ne	ne

33.

⊙ Neka je $A = \{1\}$ i $B = \{1, 2, 3, 4\}$. Odrediti broj elemenata sledećih skupova funkcija:

$$\begin{aligned} |\{f|f: A \rightarrow B\}| &= 4 & |\{f|f: A \xrightarrow{1-1} B\}| &= 4 & |\{f|f: A \rightarrow B \wedge f \nearrow\}| &= 4 & |\{f|f: B \xrightarrow{na} B\}| &= 24 \\ |\{f|f: B \rightarrow A\}| &= 1 & |\{f|f: A \xrightarrow{1-1} A\}| &= 1 & |\{f|f: B \rightarrow A \wedge f \nearrow\}| &= 1 & |\{f|f: A \xrightarrow{na} A\}| &= 1 \end{aligned}$$

34.

⊙ Skup kompleksnih rešenja jednačine $x = \sqrt[4]{0}$ je $S = \{0\}$

35.

⊙ Za kompleksni broj $z = 1 + e^{i\frac{\pi}{3}}$, naći:
 $Re(z^2) = \frac{3}{2}$, $Im(z^2) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$, $|z| = \sqrt{2}$, $\arg(z) = \frac{\pi}{6}$, $\bar{z} = 1 - e^{-i\frac{\pi}{3}}$, $z^3 = 3\sqrt{3} e^{i\frac{\pi}{2}}$

36.

⊙ Napisati u eksponencijalnom obliku, odnosno obliku $\rho e^{i\varphi}$, $\rho \in [0, \infty)$, $\varphi \in (-\pi, \pi]$ ako je $\sqrt[3]{-2}$ kompleksni:
 $-2 = 2e^{i\pi}$, $(\sqrt[3]{-2})^3 = e^{i\pi}$, $\sqrt[3]{-2} \in \{e^{i\frac{\pi}{3}}, e^{i\frac{2\pi}{3}}, e^{i\frac{4\pi}{3}}\}$, $-2 - 2i = 2\sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}}$, $\pi \cdot i = \pi e^{i\frac{\pi}{2}}$, $-\pi \cdot i = \pi e^{-i\frac{\pi}{2}}$

18:15

KOLOKVIJUM 2, PRIMER 1

1. Za ravan $\alpha: -x = 2^2$ napisati jedan njen vektor normale $\vec{n}_\alpha = (-1, 0, 0)$ i koordinate jedne njene tačke $A(-4, 0, 0)$
2. Za koje vrednosti parametra $a \in \mathbb{R}$ sistem linearnih jednačina $x - y = 1 \wedge x - y = a$ nad poljem realnih brojeva je: 1) neodređen: $a = 1$ 2) određen: $a \neq 1$ 3) kontradiktoran: $a \neq 1$
3. Za vektore $\vec{a} = (-1, 0, 1)$ i $\vec{b} = (2, 2, -1)$ izračunati: 1) $|\vec{a}| = \sqrt{2}$ 2) $|\vec{b}| = 3$ 3) $\vec{a} - 2\vec{b} = (-5, -4, 3)$ 4) $\vec{a} \cdot \vec{b} = -3$ 5) $\vec{a} \times \vec{b} = (-2, -1, 1)$ 6) $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{4}$
4. Koje od sledećih uređenih n -torki su generatorne za vektorski prostor $\mathbb{R}^3$: 1) $((0, 0, -1), (0, 4, 0), (9, 0, 0))$ 2) $((1, 0, 0), (0, -1, 0))$ 3) $((0, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 0), (1, 2, 3))$ 4) $((1, 1, 1), (2, 2, 2), (3, 3, 3))$
5. $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} = -2 \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$
6. Matrice linearnih transformacija $f(x) = (2x, x, x)$, $g(x, y, z) = (x, x, 0)$ $h(x, y) = x$ i $s(x, y, z) = x + y + z$ su:
 $M_f = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $M_g = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $M_h = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$ $M_s = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$
7. Ispod svake matrice napisati broj koji predstavlja njen rang.
 $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$
3 0 1 1 1 2 1 1
8. Odrediti sve vrednosti realnog parametara a za koje je sistem linearnih jednačina
 $ax - ay = a$
 $x - y = a$
1) kontradiktoran: $a \neq 0 \wedge a \neq 1$
2) određen: $a = 0 \vee a = 1$
3) 1 puta neodređen: $a = 0 \vee a = 1$
4) 2 puta neodređen: $a = 0 \vee a = 1$
9. Neka je $ABCD$ paralelogram, a tačke P i Q redom sredine duži BC i CD . (BD je dijagonala paralelograma). Izraziti vektor $\vec{PQ}$ kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{a} = \vec{AB}$ i $\vec{b} = \vec{BC}$. $\vec{PQ} = \frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$
10. Izraziti vektor $\vec{x} = (4, 4, 4)$ kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{a} = (1, 0, 1)$, $\vec{b} = (0, 1, 1)$ i $\vec{c} = (1, 1, 0)$:
 $\vec{x} = 2(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$
11. U vektorskom prostoru slobodnih vektora, petorka vektora (a, b, c, d, e) je:
1) uvek zavisna 2) nikad baza, 3) može ali ne mora da bude generatorna.
12. U vektorskom prostoru slobodnih vektora, par vektora (a, b) je:
1) uvek nezavisan, 2) uvek zavisan, 3) nekad nezavisan a nekad zavisan.
13. Koji od vektora su karakteristični vektori za matricu $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$? 1) $\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ 2) $\begin{bmatrix} 6 \\ -3 \end{bmatrix}$ 3) $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$
14. Ako je matrica A' dobijena od matrice $A = [a_{ij}]_{nm}$, $a_{ij} \in \mathbb{R}$ elementarnim transformacijama, tada je:
1) $|\det(A)| = \lambda |\det(A')|$ za neko $\lambda \in \mathbb{R}$ 2) $\text{rang}(A) = \text{rang}(A')$ 3) $A \cdot A' = I$ 4) $\det A \neq 0 \Leftrightarrow \det A' \neq 0$
15. Koje od tvrdjenja je tačno za bilo koje komutativne matrice A, B, C reda 2 i svaki skalar λ :
1) $\det(AB) = \det(A) + \det(B)$ 2) $(B + C)A = BA + CA$ 3) $\det(\lambda A) = \lambda^3 \det(A)$
4) $\det(AB) = \det(B)\det(A)$ 5) $(AB)^2 = A^2B^2$ 6) $\text{rang}(AB) = \text{rang}(A)\text{rang}(B)$
7) $A(B + C) = BA + CA$ 8) $A(BC) = (AB)C$

176.

176. Koja od sledećih tvrdnji je tačna za svaka dva slobodna vektora $\vec{x}$ i $\vec{a}$:

- a) $(\vec{a} - \text{pr}_{\vec{x}}\vec{a}) \perp \vec{x}$ b) $(\vec{x} - \text{pr}_{\vec{a}}\vec{x}) \perp \vec{a}$ c) $(\vec{a} - \text{pr}_{\vec{x}}\vec{a}) \parallel \vec{x}$ d) $(\vec{x} - \text{pr}_{\vec{a}}\vec{x}) \parallel \vec{a}$ e) ništa od prethodnog

177.

177. Neka su a, b i c proizvoljni vektori. Tada uređena trojka vektora $(a + b + c, b + c, b - c)$ je:

- a) uvek zavisna b) uvek nezavisna c) nekad zavisna, a nekad nezavisna, zavisi od izbor vektora a, b, c .

178.

178. Neka su a, b i c proizvoljni vektori. Tada uređena trojka vektora $(a + c, a + b, a - b + 2c)$ je:

- a) uvek zavisna b) uvek nezavisna c) nekad zavisna, a nekad nezavisna, zavisi od izbor vektora a, b, c .

179.

179. Vektori $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ i $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$ su kolinearni ako i samo ako: 1) $\vec{a} \times \vec{b} = 0$ 2) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

- 3) $\text{rang} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} = 1$ 4) $\text{rang} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} \leq 2$ 5) $\text{rang} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} \leq 1$ 6) $\vec{a}$ i $\vec{b}$ su zavisni

- 7) $(\exists \lambda \in \mathbb{R}) \vec{a} = \lambda \vec{b}$ 8) $\vec{a} \parallel \vec{b}$ 9) $(\exists \lambda \in \mathbb{R}) (\vec{a} = \lambda \vec{b} \vee \lambda \vec{a} = \vec{b})$ 10) $\alpha \vec{a} + \beta \vec{b} = 0 \wedge \alpha^2 + \beta^2 \neq 0$

179.

179. Neka je $\vec{x} = x_1\vec{i} + x_2\vec{j} + x_3\vec{k}$ proizvoljni vektor i neka je $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definisana sa $f(x_1, x_2, x_3) = \vec{m} \cdot \vec{x}$, gde je $\vec{m} = m_1\vec{i} + m_2\vec{j} + m_3\vec{k}$ dati slobodni vektor različit od nule. Funkcija $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ je:

- 1) linearna transformacija 2) injektivna 3) surjektivna 4) bijektivna 5) izomorfizam

179.

179. Za svaku linearnu transformaciju $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ i svako $x, y, \lambda, v \in \mathbb{R}$ tačno je: 1) $x = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$

- 2) $f(0) = 0$ 3) $f(2xy) = f(x)f(2y)$ 4) $f(xy) = x f(y)$ 5) $f(x) = ax + 1$ za neko $a \in \mathbb{R}$

- 6) $f(2\lambda + v) = 2f(\lambda) + f(v)$

179.

179. Neka je $\varphi: V \rightarrow \mathbb{R}^3$ definisana sa $\varphi(x_1\vec{i} + x_2\vec{j} + x_3\vec{k}) = (x_1, x_1, x_1)$ tj. $\varphi(\vec{x}) = (\vec{x}\vec{i}, \vec{x}\vec{i}, \vec{x}\vec{i})$, gde su $(V, \mathbb{R}, +, \cdot)$ i $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}, +, \cdot)$ vektorski prostori slobodnih vektora i uređenih trojki. Da li je funkcija $\varphi: V \rightarrow \mathbb{R}^3$

- 1) linearna transformacija 2) injektivna 3) surjektivna 4) bijektivna 5) izomorfizam

179.

179. Neka je $\mathcal{M}$ skup svih kvadratnih matrica reda 3 čiji svi elementi su iz skupa realnih brojeva $\mathbb{R}$. Tada je:

- 1) $\det: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ 2) $\det: \mathcal{M} \xrightarrow{1-1} \mathbb{R}$ 3) $\det: \mathcal{M} \xrightarrow{na} \mathbb{R}$ 4) $\det: \mathcal{M} \xrightarrow{1-1} \mathbb{R}$ 5) $\det$ je linearna transformacija

179.

179. Neka je $\mathcal{M}$ skup svih matrica formata $(2, 3)$ čiji svi elementi su iz skupa realnih brojeva $\mathbb{R}$. Tada je:

- 1) $\text{rang}: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ 2) $\text{rang}: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{N}$ 3) $\text{rang}: \mathcal{M} \xrightarrow{na} \mathbb{N} \cup \{0\}$ 4) $\text{rang}: \mathcal{M} \xrightarrow{1-1} \mathbb{N} \cup \{0\}$

- 5) $\text{rang}: \mathcal{M} \xrightarrow{na} \{0, 1, 2\}$

179.

179. Ako je $f(0) = 0$, tada f : 1) jeste linearna transformacija 2) nije linearna transformacija 3) može a ne mora biti linearna transformacija 4) jeste linearna transformacija ako preslikava vektorski prostor u vektorski prostor

179.

179. Neka je $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ generatorna u prostoru V , $(c_1, c_2, \dots, c_m)$ nezavisna za prostor V i $\dim V = k$. Tada je

- 1) $m \leq k \leq n$ 2) $n \leq k \leq m$ 3) $n \leq m \leq k$ 4) $k \leq m \leq n$ 5) $k \leq n \leq m$ 6) $m \leq n \leq k$

179.

179. Neka je $\vec{r}_A$ vektor položaja tačke A , $|\vec{AB}| = 2$. Odrediti $\vec{r}_B$ u zavisnosti od $\vec{r}_A$ i $\vec{a}$, ako je vektor $\vec{a}$ istog pravca kao i vektor $\vec{AB}$, a suprotnog smera od vektora $\vec{AB}$. $\vec{r}_B = \vec{r}_A - \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \cdot 2$

179.

179. Neka je k -torka vektora $(b_1, b_2, \dots, b_k)$ nezavisna i neka je $(d_1, d_2, \dots, d_\ell)$ zavisna ℓ -torka vektora. Tada je: 1) $k \leq \ell$ 2) $\ell \leq k$ 3) $k = \ell$ 4) $\ell < k$ 5) $\ell > k$ 6) ništa od prethodnog

179.

179. Koji od sledećih podskupova $U \subseteq \mathbb{R}^3$ je potprostor i za one koji jesu napiši desno od njih njihovu dimehiziju: 1) $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = 0\}$, $\dim U = 2$

- 2) $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + x^2 = 0\}$ $\dim U = 2$

- 3) $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \cdot 0 = 0\}$ $\dim U = 3$

- 4) $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = z + 0\}$ $\dim U = 2$

179.

179. Neka je $a = (0, 2, 2)$, $b = (0, -3, 3)$, $c = (0, 1, -1)$, $d = (0, -1, 1)$, $e = (1, 0, 0)$, $f = (0, 1, 0)$, $g = (0, 1, 2)$. Odrediti dimenzije sledećih potprostora V vektorskog prostora $\mathbb{R}^3$:

- 1) $V = L(a, b, c) \Rightarrow \dim(V) = 2$ 2) $V = L(a) \Rightarrow \dim(V) = 1$

- 3) $V = L(a, b) \Rightarrow \dim(V) = 2$ 4) $V = L(b, c, d) \Rightarrow \dim(V) = 1$

- 5) $V = L(b, c, e) \Rightarrow \dim(V) = 2$ 6) $V = L(a, g) \Rightarrow \dim(V) = 2$

- 7) $V = L(e, f, g) \Rightarrow \dim(V) = 3$

31. ☒ Izračunati bar jedan nenula vektor $\vec{n}$ koji je normalan i na vektor $\vec{i} + \vec{j}$ i na vektor $\vec{k}$.
 $\vec{n} = (1, -1, 0)$
32. ☒ Ako je A kvadratna matrica reda n , tada je: ~~1)~~ $\det A = 0 \Rightarrow \text{rang } A = 0$
~~2)~~ $\det A = 0 \Leftrightarrow \text{rang } A \leq n-1$, ~~3)~~ $\det A = 0 \Rightarrow \text{rang } A = n$ ~~4)~~ $\text{rang } A = n \Rightarrow \det A \neq 0$,
~~5)~~ $\text{rang } A = n \Leftrightarrow \det A \neq 0$, ~~6)~~ $\text{rang } A = n \Leftrightarrow \exists A^{-1}$
33. ☒ Neka su $\mathbf{a}_1 = (a_{11}, \dots, a_{n1})$, $\mathbf{a}_2 = (a_{12}, \dots, a_{n2})$, ..., $\mathbf{a}_n = (a_{1n}, \dots, a_{nn})$ vektori kolne matrice $A = A_{nn} = [a_{ij}]_{nn}$, neka je $V = \text{Lin}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n) = \{\alpha_1 \mathbf{a}_1 + \alpha_2 \mathbf{a}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{a}_n \mid \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}\}$ i neka je α_i^2 skalarni proizvod vektora $\mathbf{a}_i$ sa samim sobom. Tada je: ~~1)~~ $\mathbf{a}_1 = \dots = \mathbf{a}_n = 0 \Leftrightarrow \mathbf{a}_1^2 + \dots + \mathbf{a}_n^2 = 0$
~~2)~~ $\dim V = 0 \Leftrightarrow \text{rang } A = 0$ ~~3)~~ $\dim V = 0 \Leftrightarrow \mathbf{a}_1 = \dots = \mathbf{a}_n = 0$ ~~4)~~ $\dim V = 0 \Leftrightarrow \mathbf{a}_1^2 + \dots + \mathbf{a}_n^2 = 0$
~~5)~~ $\text{rang } A = 0 \Leftrightarrow \mathbf{a}_1 = \dots = \mathbf{a}_n = 0$ ~~6)~~ $\text{rang } A = 0 \Leftrightarrow \mathbf{a}_1^2 + \dots + \mathbf{a}_n^2 = 0$
34. ☒ Linearne transformacije $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ i $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ su uvek oblika:
 $f(x, y) = (2x + 3y, 7y + \delta y, \phi x + \gamma y)$ $g(x, y) = (2x + 3y)$ $h(x) = 2x$
35. ☒ Postoji linearna transformacija $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ za koju važi da je:
~~2)~~ injektivna ~~3)~~ bijektivna ~~4)~~ izomorfizam ~~5)~~ ništa od prethodnog ~~1)~~ surjektivna
36. ☒ Postoji linearna transformacija $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ za koju važi da je:
~~2)~~ surjektivna ~~3)~~ bijektivna ~~4)~~ izomorfizam ~~5)~~ ništa od prethodnog ~~1)~~ injektivna
37. ☒ Za **svaki** vektorski prostor V i svaku surjektivnu linearnu transformaciju $f: V \rightarrow V$ sledi da je transformacija f : ~~1)~~ injektivna ~~2)~~ bijektivna ~~3)~~ izomorfizam ~~4)~~ ništa od prethodnog
38. ☒ Za **svaki** vektorski prostor V i svaku injektivnu linearnu transformaciju $f: V \rightarrow V$ sledi da je transformacija f : ~~1)~~ surjektivna ~~2)~~ bijektivna ~~3)~~ izomorfizam ~~4)~~ ništa od prethodnog
39. ☒ Za **svaki** izomorfizam $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ i njegovu matricu A važi: ~~1)~~ f je injektivna ~~2)~~ postaoji A^{-1}
~~3)~~ $n = m$ ~~4)~~ f je surjektivna ~~5)~~ f je bijektivna ~~6)~~ A je regularna ~~7)~~ $\det A \neq 0$ ~~8)~~ ništa od prethodnog
40. ☒ Za **svaki** vektorski prostor V postoji homogen sistem linearnih jednačina, čiji skup svih rešenja je vektorski prostor izomorfan prostoru V . Zakruži tačan odgovor: ☒ DA ☐ NE

KOLOKVIJUM 2, PRIMER 2

1. ☒ Neka tačke $P(1, 0, 0)$, $Q(0, 1, 0)$ i $R(0, 0, 1)$ pripadaju ravni α . Tada je
 $\vec{PQ} = (-1, 1, 0)$ i $\vec{PR} = (-1, 0, 1)$. Napisati bar jedan vektor $\vec{n}$ normalan na α , $\vec{n} = (1, 1, 1)$.
Ako je $(A, B, C, D) = (1, 1, 1, -1)$, tada je $Ax + By + Cz + D = 0$ jednačina ravni α . Napisati bar jednu tačku $M \in \alpha$ i $M \notin \{P, Q, R\}$, $M(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.
2. ☒ Za koje vrednosti parametra $a \in \mathbb{R}$ sistem linernih jednačina $x - y = 1 \wedge ax - y = 1$ nad poljem realnih brojeva je: 1) neodređen: $a = 1$ 2) određen: $a \neq 1$ 3) kontradiktoran: ☒
3. ☒ Za vektore $\vec{a} = (-1, 1, 0)$ i $\vec{b} = (-1, 0, 1)$ izračunati: 1) $|\vec{a}| = \sqrt{2}$ 2) $|\vec{b}| = \sqrt{2}$
3) $\vec{a} - 2\vec{b} = (1, 1, -1)$ 4) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1$ 5) $\vec{a} \times \vec{b} = (1, 1, 1)$ 6) $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{3}$
4. ☒ Koje od sledećih uređenih n -torki **nisu** generatorne za vektorski prostor $\mathbb{R}^3$:
~~1)~~ $((0, 0, -1), (0, 4, 0), (9, 0, 0))$ ~~2)~~ $((1, 0, 0), (0, -1, 0))$ ~~3)~~ $((0, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 0), (1, 2, 3))$
~~4)~~ $((1, 1, 1), (2, 2, 2), (3, 3, 3))$
5. ☒ $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \end{bmatrix}$ $\begin{vmatrix} 9 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & 0 \\ 9 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -729$ $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$
6. ☒ Matrice linearnih transformacija $f(x, y) = (2x, x, y)$, $g(x, y, z) = (x, z)$, $h(x, y) = (x, y)$ i $s(x, y, z) = z$ su:
 $M_f = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $M_g = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $M_h = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $M_s = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

7. Ispod svake matrice napisati broj koji predstavlja njen rang.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

3 2 2 2 1 2 1 1 1

8. Odrediti sve vrednosti realnog parametara a za koje je sistem linearnih jednačina
- $$\begin{aligned} ax + y &= a - 4 \\ -x + ay &= a + 9 \end{aligned}$$
- 1) kontradiktoran: _____
2) određen: $a \in \mathbb{R}$ _____
3) 1 puta neodređen: _____
4) 2 puta neodređen: _____

9. Neka je $ABCD$ paralelogram, a tačke P i Q redom sredine duži BC i CD . (BD je dijagonala paralelograma). Izraziti vektor $\overrightarrow{PQ}$ kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{a} = \overrightarrow{AD}$ i $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$. $\overrightarrow{PQ} = \vec{c} - \frac{\vec{b}}{2}$

10. Napisati $\vec{x} = (1, 2, 3)$ kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{a} = (0, 0, 1)$, $\vec{b} = (0, 1, 1)$ i $\vec{c} = (1, 1, 1)$: $\vec{x} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$

11. Naći vektor položaja projekcije A' tačke $A(1, 2, 3)$ na pravu p određenu sa $x = 8 \wedge z = 9$: $\vec{r}_{A'} = (8, 2, 9)$

12. Naći vektor položaja $\vec{r}_T$ tačke T , prodora prave $p: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{2}$ kroz ravan $\alpha: x + y + z = 0$.

$$\vec{r}_T = \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right)$$

13. Koji od vektora su karakteristični vektori za matricu $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$? 1) $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ 2) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ 3) $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$

14. Koje od tvrdjenja je tačno za bilo koje komutativne matrice A, B, C reda 3 i svaki skalar λ :

1) $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ 2) $(B+C)A = BA + CA$ 3) $\det(\lambda A) = \lambda^3 \det(A)$

4) $\det(AB) = \det(B)\det(A)$ 5) $(AB)^2 = A^2B^2$ 6) $\text{rang}(AB) = \text{rang}(BA)$

7) $A(B+C) = BA + CA$ 8) $A(BC) = (AB)C$

15. Neka su a, b i c proizvoljni zavisni vektori. Tada uređena trojka vektora $(a+b+c, b+c, b-c)$ je:

1) uvek zavisna 2) uvek nezavisna 3) nekad zavisna, a nekad nezavisna, zavisi od izbora vektora a, b, c .

16. Neka su a, b i c proizvoljni nezavisni vektori. Tada uređena trojka vektora $(a+c, a+b, -a+c-2b)$ je:

1) uvek zavisna 2) uvek nezavisna 3) nekad zavisna, a nekad nezavisna, zavisi od izbora vektora a, b, c .

17. Ako su $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ i $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$ kolinearni, tada važi: 1) $\vec{a} \times \vec{b} = 0$ 2) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

3) $\text{rang} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} = 1$ 4) $\text{rang} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} \leq 2$ 5) $\text{rang} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} \leq 1$ 6) $\vec{a}$ i $\vec{b}$ su zavisni

7) $(\exists \lambda \in \mathbb{R}) \vec{a} = \lambda \vec{b}$ 8) $\vec{a} \parallel \vec{b}$ 9) $(\exists \lambda \in \mathbb{R}) (\vec{a} = \lambda \vec{b} \vee \lambda \vec{a} = \vec{b})$ 10) $(\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}) \alpha \vec{a} + \beta \vec{b} = 0 \wedge \alpha^2 + \beta^2 \neq 0$

18. Ako su $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$, $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$ i $\vec{c} = c_1\vec{i} + c_2\vec{j} + c_3\vec{k}$ nekomplanarni tada važi:

1) $\text{rang} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} = 2$ 2) $\text{rang} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \leq 3$ 3) $\text{rang} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} = 3$

4) $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$ 5) $\vec{a}(\vec{b} \times \vec{c}) = 0$ 6) $(\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}) \vec{a} = \alpha \vec{b} + \beta \vec{c}$

7) $\alpha \vec{a} + \beta \vec{b} + \gamma \vec{c} = 0 \wedge \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 0$ 8) $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ je zavisna.

19. Neka je $\varphi: V \rightarrow \mathbb{R}^3$ definisana sa $\varphi(x_1\vec{i} + x_2\vec{j} + x_3\vec{k}) = (x_1, x_1 + x_2, x_1 + x_2 + x_3)$ gde su $(V, \mathbb{R}, +, \cdot)$ i $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}, +, \cdot)$ vektorski prostori slobodnih vektora i uređenih trojki. Da li je funkcija $\varphi: V \rightarrow \mathbb{R}^3$

- 1) linearna transformacija 2) injektivna 3) surjektivna 4) bijektivna 5) izomorfizam

20. Neka je $\mathcal{M}$ skup svih matrica formata $(3, 5)$ čiji svi elementi su iz skupa realnih brojeva $\mathbb{R}$. Tada je:

1) $\text{rang}: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ 2) $\text{rang}: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{N}$ 3) $\text{rang}: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$ 4) $\text{rang}: \mathcal{M} \xrightarrow{1-1} \mathbb{N} \cup \{0\}$

5) $\text{rang}: \mathcal{M} \xrightarrow{n_2} \{0, 1, 2, 3\}$

21. Ako je $f(0) = 0$, tada f : 1) jeste linearna transformacija 2) nije linearna transformacija 3) može a ne mora biti linearna transformacija 4) jeste linearna transformacija ako preslikava vektorski prostor u vektorski prostor

22. ☒ Neka je $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ generatorna u prostoru V , $(c_1, c_2, \dots, c_m)$ nezavisna za prostor V i $\dim V = k$. Tada je
☒ 1) $m \leq k \leq n$ ☒ 2) $n \leq k \leq m$ ☒ 3) $n \leq m \leq k$ ☒ 4) $k \leq m \leq n$ ☒ 5) $k \leq n \leq m$ ☒ 6) $m \leq n \leq k$
23. ☒ Neka je $\vec{r}_A$ vektor položaja tačke $A(1, 2, 4)$, $|\vec{AB}| = 3$. Odrediti $\vec{r}_B$ ako je $\vec{a} = (1, 2, 2)$ i ako je vektor $\vec{a}$ istog pravca kao i vektor $\vec{AB}$, a suprotnog smera od vektora $\vec{AB}$. $\vec{r}_B = (0, 0, 7)$
24. ☒ Koji od sledećih podskupova $U \subseteq \mathbb{R}^3$ je potprostor i za one koji jesu napiši desno od njih njihovu dimenziju:
☒ 1) $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = 1\}$, $\dim U = 2$
☒ 2) $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 0\}$ $\dim U = 1$
☒ 3) $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \cdot 0 = 0\}$ $\dim U = 3$
☒ 4) $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = z + 0\}$ $\dim U = 2$
25. ☒ Neka je $a = (0, 0, 0)$, $b = (1, 0, 1)$, $c = (1, 0, -1)$, $d = (-1, 0, 1)$, $e = (1, 1, 1)$, $f = (1, 0, 0)$, $g = (2, 0, 2)$. Odrediti dimenzije sledećih potprostora V vektorskog prostora $\mathbb{R}^3$:
1) $V = L(a) \Rightarrow \dim(V) = 0$ 2) $V = L(a, b) \Rightarrow \dim(V) = 1$
3) $V = L(a, b, c) \Rightarrow \dim(V) = 2$ 4) $V = L(b, c, d) \Rightarrow \dim(V) = 2$
5) $V = L(b, c, e) \Rightarrow \dim(V) = 3$ 6) $V = L(e, f, g) \Rightarrow \dim(V) = 3$
26. ☒ Ako je A kvadratna matrica reda n , tada je: ☒ 1) $\det A = 0 \Rightarrow \text{rang } A = 0$
☒ 2) $\det A = 0 \Leftrightarrow \text{rang } A \leq n - 1$ ☒ 3) $\det A = 0 \Rightarrow \text{rang } A = n$ ☒ 4) $\text{rang } A = n \Rightarrow \det A \neq 0$,
☒ 5) $\text{rang } A = n \Leftarrow \det A \neq 0$ ☒ 6) $\text{rang } A = n \Leftarrow \exists A^{-1}$.
27. ☒ Neka su $\mathbf{a}_1 = (a_{11}, \dots, a_{n1})$, $\mathbf{a}_2 = (a_{12}, \dots, a_{n2})$, ..., $\mathbf{a}_n = (a_{1n}, \dots, a_{nn})$ vektori kolone matrice $A = A_{nn} = [a_{ij}]_{nn}$, neka je $V = \text{Lin}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n) = \{\alpha_1 \mathbf{a}_1 + \alpha_2 \mathbf{a}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{a}_n \mid \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}\}$ i neka je $\mathbf{a}_i^2$ skalarni proizvod vektora $\mathbf{a}_i$ sa samim sobom. Tada je: ☒ 1) $\mathbf{a}_1 = \dots = \mathbf{a}_n = 0 \Leftrightarrow \mathbf{a}_1^2 + \dots + \mathbf{a}_n^2 = 0$
☒ 2) $\dim V = 0 \Leftrightarrow \text{rang } A = 0$ ☒ 3) $\dim V = 0 \Leftrightarrow \mathbf{a}_1 = \dots = \mathbf{a}_n = 0$ ☒ 4) $\dim V = 0 \Leftrightarrow \mathbf{a}_1^2 + \dots + \mathbf{a}_n^2 = 0$
☒ 5) $\text{rang } A = 0 \Leftrightarrow \mathbf{a}_1 = \dots = \mathbf{a}_n = 0$ ☒ 6) $\text{rang } A = 0 \Leftrightarrow \mathbf{a}_1^2 + \dots + \mathbf{a}_n^2 = 0$
28. ☒ Linearne transformacije $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ i $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ su uvek oblika:
 $f(x, y, z) = (2x + 3y + 4z, 5x + 6y + 7z)$ $g(x) = (2x, 3x)$ $h(x) = 2x$
29. ☒ Postoji linearna transformacija $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ za koju važi da je: ☒ 1) surjektivna
☒ 2) injektivna ☒ 3) bijektivna ☒ 4) izomorfizam ☒ 5) ništa od prethodnog
30. ☒ Postoji linearna transformacija $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ za koju važi da je: ☒ 1) injektivna
☒ 2) surjektivna ☒ 3) bijektivna ☒ 4) izomorfizam ☒ 5) ništa od prethodnog.
31. ☒ Za svaki vektorski prostor V i svaku surjektivnu linearnu transformaciju $f: V \rightarrow V$ sledi da je transformacija f : ☒ 1) injektivna ☒ 2) bijektivna ☒ 3) izomorfizam ☒ 4) ništa od prethodnog.
32. ☒ Za svaki vektorski prostor V i svaku injektivnu linearnu transformaciju $f: V \rightarrow V$ sledi da je transformacija f : ☒ 1) surjektivna ☒ 2) bijektivna ☒ 3) izomorfizam ☒ 4) ništa od prethodnog
33. ☒ Za svaki izomorfizam $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ i njegovu matricu A važi:
☒ 1) f je injektivna ☒ 2) postoji A^{-1} ☒ 3) $n = m$ ☒ 4) f je surjektivna ☒ 5) f je bijektivna ☒ 6) A je regularna ☒ 7) $\det A \neq 0$ ☒ 8) ništa od prethodnog
34. ☒ Za svaki vektorski prostor V postoji homogen sistem linearnih jednačina, čiji skup svih rešenja je vektorski prostor izomorfan prostoru V . Zakruži tačan odgovor ☒ DA ☒ NE

KOLOKVIJUM 2, PRIMER 3

1. ☒ Neka tačke $P(0, 0, 0)$ i $Q(0, 1, 0)$ pripadaju ravni α koja je paralelna sa vektorom $(1, 1, 1)$. Napisati bar jedan vektor $\vec{n}$ normalan na ravan α , $\vec{n} = (-1, 0, 1)$. Ako je $(A, B, C, D) = (-1, 0, 1, 0)$, tada jednačina $Ax + By + Cz + D = 0$ jeste jednačina ravni α . ($\forall t, s \in \mathbb{R}$) $M(t, s, t) \in \alpha$. DA ☒ NE

3. Za koje vrednosti parametra $a \in \mathbb{R}$ sistem linearnih jednačina $ax - ay = a \wedge -2ax + 2ay = -2a$ nad poljem realnih brojeva je: 1) neodređen: $a \neq 0$ 2) određen: $a = 0$ 3) kontradiktoran: $a \neq 0$

6. Za vektore $\vec{a} = (-1, 0, 0)$ i $\vec{b} = (-1, 0, 1)$ izračunati: 1) $|\vec{a}| = 1$ 2) $|\vec{b}| = \sqrt{2}$
3) $\vec{a} - 2\vec{b} = (1, 0, -2)$ 4) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1$ 5) $\vec{a} \times \vec{b} = (0, 1, 0)$ 6) $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{4}$

4. Koje su od sledećih uređenih n -torki baze vektorskog prostora $\mathbb{R}^3$: ① $((0, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 0))$
2) $((1, 0, 0), (0, 2, 0))$ 3) $((1, 3, 2), (1, 1, 0), (3, 0, 4), (1, 2, 3))$ 4) $((1, 0, 0), (2, 0, 0), (3, 0, 0))$

5. $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 6 \end{bmatrix}$ $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 7 & -2 \end{vmatrix} = 1$ $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 7 & -2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -7 & 3 \end{bmatrix}$

6. Matrica linearne transformacije $f(x, y) = (2y, x - y, 3x + y)$ je: $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

7. Ispod svake matrice napisati broj koji predstavlja njen rang.

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

8. Odrediti sve vrednosti realnog parametara a za koje je sistem linearnih jednačina
 $ax + ay = a$
 $-x + ay = a$
1) kontradiktoran: $a \neq 0 \wedge a \neq -1$
2) određen: $a = 0 \vee a = -1$
3) 1 puta neodređen: $a = 0 \vee a = -1$
4) 2 puta neodređen: $a = 0 \vee a = -1$

9. Neka je $ABCD$ paralelogram, a tačke P i Q redom sredine duži AC i BP . (BD je dijagonala paralelograma). Izraziti vektor $\vec{AQ}$ kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{a} = \vec{AB}$ i $\vec{b} = \vec{BC}$. $\vec{AQ} = \frac{2\vec{a}}{4} + \frac{\vec{b}}{4}$

10. Napisati $\vec{x} = (0, -2, -1)$ kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{a} = (1, 0, -1)$, $\vec{b} = (0, -1, 1)$ i $\vec{c} = (1, 1, 1)$:
 $\vec{x} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$

11. Naći vektor položaja projekcije A' tačke $A(1, 1, -1)$ na ravan $x + y + z = 0$: $\vec{r}_{A'} = (\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{4}{3})$

12. Naći vektor položaja $\vec{r}_T$ tačke T , prodora prave $p: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{1}$ kroz ravan $\alpha: x + 2y - z = 0$.
 $\vec{r}_T = (1, 0, 1)$

13. Karakteristični polinom matrice $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ je: $\lambda^2 - 8$, a karakteristični koreni λ su
 $\lambda \in \{2\sqrt{2}, -2\sqrt{2}\}$

14. Koje od tvrdjenja je tačno za bilo koje matrice A, B, C reda 1 i svaki skalar λ :
① $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ ② $(B+C)A = BA + CA$ ③ $\det(\lambda A) = \lambda \det(A)$
④ $\det(AB) = \det(B)\det(A)$ ⑤ $(AB)^2 = A^2B^2$ ⑥ $\text{rang}(AB) = \text{rang}(BA)$
⑦ $A(B+C) = BA + CA$ ⑧ $A(BC) = (AB)C$

15. Neka su a, b i c proizvoljni vektori. Tada uređena trojka vektora $(a + b + c, b + c, b - c)$ je:
1) uvek zavisna 2) uvek nezavisna 3) nekad zavisna, a nekad nezavisna, zavisi od izbora vektora a, b, c .

16. Neka su a, b i c proizvoljni nezavisni vektori. Tada uređena trojka vektora $(a + c, a + b, b + c)$ je:
1) uvek zavisna 2) uvek nezavisna 3) nekad zavisna, a nekad nezavisna, zavisi od izbora vektora a, b, c .

17. Vektori $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ i $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$ su nekolinearni ako i samo ako: 1) $\vec{a} \times \vec{b} = 0$
2) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ 3) $\text{rang} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} = 1$ 4) $\text{rang} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} = 2$ 5) $\text{rang} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} \leq 1$
6) $\vec{a}$ i $\vec{b}$ su nezavisni 7) $(\exists \lambda \in \mathbb{R}) \vec{a} = \lambda \vec{b}$ 8) $\vec{a} \parallel \vec{b}$ 9) $(\exists \lambda \in \mathbb{R}) (\vec{a} = \lambda \vec{b} \vee \lambda \vec{a} = \vec{b})$
10) $(\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}) \alpha \vec{a} + \beta \vec{b} = 0 \wedge \alpha^2 + \beta^2 \neq 0$

18. Vektori $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$, $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$ i $\vec{c} = c_1\vec{i} + c_2\vec{j} + c_3\vec{k}$ su komplanarni ako i samo ako:

1) $\text{rang} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} = 2$ 2) $\text{rang} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \leq 3$ 3) $\text{rang} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} = 3$

4) $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$ 5) $\vec{a}(\vec{b} \times \vec{c}) = 0$ 6) $(\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}) \vec{a} = \alpha\vec{b} + \beta\vec{c}$

7) $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = 0 \wedge \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 0$ 8) $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ je zavisna.

19. Neka je $\varphi: V \rightarrow \mathbb{R}^3$ definisana sa $\varphi(x_1\vec{i} + x_2\vec{j} + x_3\vec{k}) = (x_1 - x_2, x_1 + x_3, -x_1 - x_2 - 2x_3)$ gde su $(V, \mathbb{R}, +, \cdot)$ i $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}, +, \cdot)$ vektorski prostori slobodnih vektora i uređenih trojki. Da li je funkcija $\varphi: V \rightarrow \mathbb{R}^3$

1) linearna transformacija 2) injektivna 3) surjektivna 4) bijektivna 5) izomorfizam

20. Neka je $\mathcal{M}$ skup svih matrica formata $(1, 1)$ čiji svi elementi su iz skupa realnih brojeva $\mathbb{R}$. Tada je:

1) $\text{rang}: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ 2) $\text{rang}: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{N}$ 3) $\text{rang}: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$ 4) $\text{rang}: \mathcal{M} \xrightarrow{1-1} \mathbb{N} \cup \{0\}$
5) $\text{rang}: \mathcal{M} \xrightarrow{na} \{0, 1\}$

21. $(\forall x \in \mathbb{R}^5) f(x) = 0$, tada $f: \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}$: 1) jeste linearna transformacija 2) nije linearna transformacija 3) može a ne mora biti linearna transformacija 4) jeste injektivna 5) jeste surjektivna 6) jeste izomorfizam

22. Neka je $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ zavisna, a $(c_1, c_2, \dots, c_m)$ nezavisna za prostor V i $\dim V = k$. Tada je moguće
1) $m \leq k \leq n$ 2) $n \leq k \leq m$ 3) $n \leq m \leq k$ 4) $k \leq m \leq n$ 5) $k \leq n \leq m$ 6) $m \leq n \leq k$

23. Neka je $\vec{r}_A$ vektor položaja tačke $A(1, 1, 1)$, $|\vec{AB}| = 3$ i $|\vec{BC}| = 9$. Odrediti $\vec{r}_C$ ako je $\vec{a} = (1, 2, 2)$, $\vec{b} = (1, 4, 8)$ i ako su vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ istog pravca i smera redom kao i vektori $\vec{AB}$ i $\vec{BC}$. $\vec{r}_C = (3, 7, 11)$

24. Koji od sledećih podskupova $U \subseteq \mathbb{R}^3$ je potprostor i za one koji jesu napiši desno od njih njihovu dimenziju:

1) $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = y\}$, $\dim U = 2$
2) $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^4 + y^4 = 0\}$, $\dim U = 1$
3) $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = x\}$, $\dim U = 3$
4) $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = z = y\}$, $\dim U = 1$

25. Ako je $f: V \rightarrow V$ homomorfizam prostora V u samog sebe, tada je: 1) f mora biti izomorfizam 2) $\dim(V) = \dim(f(V))$ 3) $f(0) = 0$ (gde je 0 nula-vektor prostora V)
4) za svaku nezavisnu n -torku vektora $(v_1, \dots, v_n)$ iz V , n -torka $(f(v_1), \dots, f(v_n))$ je nezavisna u V
5) za svaku zavisnu n -torku vektora $(v_1, \dots, v_n)$ iz V , n -torka $(f(v_1), \dots, f(v_n))$ je zavisna u V

26. Ako je A kvadratna matrica reda 5, tada je: 1) $\det A = 0 \Rightarrow \text{rang } A = 0$
2) $\det A = 0 \Leftrightarrow \text{rang } A \leq 4$, 3) $\det A = 0 \Rightarrow \text{rang } A = 5$ 4) $\text{rang } A = 5 \Rightarrow \det A \neq 0$,
5) $\text{rang } A = 5 \Leftrightarrow \det A \neq 0$, 6) $\text{rang } A = 5 \Leftrightarrow \exists A^{-1}$.

27. Neka su $\mathbf{a}_1 = (a_{11}, \dots, a_{n1})$, $\mathbf{a}_2 = (a_{12}, \dots, a_{n2})$, ..., $\mathbf{a}_n = (a_{1n}, \dots, a_{nn})$ vektori kolone matrice $A = A_{nn} = [a_{ij}]_{nn}$, neka je $V = \text{Lin}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n) = \{\alpha_1\mathbf{a}_1 + \alpha_2\mathbf{a}_2 + \dots + \alpha_n\mathbf{a}_n \mid \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}\}$ i neka je $\mathbf{a}_i^2$ skalarni proizvod vektora $\mathbf{a}_i$ sa samim sobom. Tada je: 1) $\mathbf{a}_1 = \dots = \mathbf{a}_n = 0 \Leftrightarrow \mathbf{a}_1^2 + \dots + \mathbf{a}_n^2 = 0$
2) $\dim V = 0 \Leftrightarrow \text{rang } A = 0$ 3) $\dim V = 0 \Leftrightarrow \mathbf{a}_1 = \dots = \mathbf{a}_n = 0$ 4) $\dim V = 0 \Leftrightarrow \mathbf{a}_1^2 + \dots + \mathbf{a}_n^2 = 0$
5) $\text{rang } A = 0 \Leftrightarrow \mathbf{a}_1 = \dots = \mathbf{a}_n = 0$ 6) $\text{rang } A = 0 \Leftrightarrow \mathbf{a}_1^2 + \dots + \mathbf{a}_n^2 = 0$

28. Linearne transformacije $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ i $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ su uvek oblika:

$f(x) = (2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4, 6x_1 + 7x_2 + 8x_3 + 9x_4)$ $g(x) = (2x, 3x, 4x)$ $h(x) = 2x$

29. Postoji linearna transformacija $f: \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^4$ za koju važi da je: 1) surjektivna
2) injektivna 3) bijektivna 4) izomorfizam 5) ništa od prethodnog

30. Postoji linearna transformacija $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^5$ za koju važi da je: 1) injektivna
2) surjektivna 3) bijektivna 4) izomorfizam 5) ništa od prethodnog.

31. Za vektorski prostor $\mathbb{R}^5$ i svaku surjektivnu linearnu transformaciju $f: \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^5$ sledi da je transformacija
- 1) injektivna 2) bijektivna 3) izomorfizam 4) ništa od prethodnog.
32. Za svaki vektorski prostor V i svaku injektivnu linearnu transformaciju $f: V \rightarrow V$ sledi da je f :
- 1) surjektivna 2) bijektivna 3) izomorfizam 4) ništa od prethodnog
33. Za svaki izomorfizam $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ i njegovu matricu A važi: 1) f je injektivna 2) postoji A^{-1} 3) $n = m$ 4) f je surjektivna 5) f je bijektivna 6) A je regularna 7) $\det A \neq 0$ 8) ništa od prethodnog
34. Za svaki vektorski prostor $\mathbb{R}^n$ postoji homogen sistem linearnih jednačina, čiji skup svih rešenja je vektorski prostor izomorfan prostoru $\mathbb{R}^n$. Zaokruži tačan odgovor DA NE
35. Ako je A regularna kvadratna matrica i $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, tada važi: 1) $(\alpha A)^{-1} = \frac{1}{\alpha} A^{-1}$ 2) $(\alpha A)^{-1} = \alpha A^{-1}$ 3) $(\alpha A)^{-1} = \alpha \frac{1}{\det A} A^{-1}$ 4) $(\alpha A)^{-1} = A^{-1} \alpha$ 5) $(\alpha A)^{-1} = A^{-1} \alpha^{-1}$ 6) $(\alpha A)^{-1} = \alpha^{-1} A^{-1}$

KOLOKVIJUM 2, PRIMER 4

1. Neka tačke $P(0, 0, 0)$ i $Q(1, 1, 1)$ pripadaju ravni α koja je paralelna sa vektorom $(1, 1, -1)$. Napisati bar jedan vektor $\vec{n}$ normalan na ravan α , $\vec{n} = (\gamma, \gamma, 0)$. Ako je $(A, B, C, D) = (-1, 1, 1, 0)$, tada jednačina $Ax + By + Cz + D = 0$ jeste jednačina ravni α . ($\forall t, s \in \mathbb{R}$) $M(t, s, t) \in \alpha$. DA NE

2. Za koje vrednosti parametra $a \in \mathbb{R}$ sistem jednačina $ax - ay = a \wedge ax + ay = a$ nad poljem realnih brojeva je:

1) dvostruko neodređen: $a = 0$ 2) jednostruko neodređen: 3) određen: $a \neq 0$ 4) kontradiktoran:

3. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -1$ $\begin{bmatrix} 8 & -7 \\ 9 & -8 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 8 & 7 \\ -9 & 8 \end{bmatrix}$

4. Zaokružiti cifru (cifre) ispred uređenih n -torki koje su linearno NEZAVISNE u vektorskom prostoru trojki $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$: 1) $((0, 1, 0))$ 2) $((1, 2, 0), (1, 1, 0), (2, -1, 1))$ 3) $((1, 0, 0), (2, 0, 2))$ 4) $((1, 0, 0), (0, 2, 0), (0, 0, 3))$ 5) $((1, 1, 1), (2, 2, 2))$ 6) $((0, 0, 2), (0, 0, 0), (3, 0, 0))$ 7) $((0, 1, 0), (0, 2, 0))$ 8) $((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 2, 3))$

5. Ispod svake matrice napisati broj koji predstavlja njen rang.

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

6. Matrice i rangovi linearnih transformacija $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x) = (2x, 3x)$ i $g, h, r, s: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $g(x, y, z) = (y, x + z)$, $h(x, y, z) = (x - y, 0)$, $r(x, y, z) = (z, y)$, $s(x, y, z) = (x - y - z, z - x - y)$, $p(x, y, z) = (0, 0)$ su: (Rang upisati ispod odgovarajuće matrice)

$M_f = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ $M_g = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $M_h = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $M_r = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $M_s = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ $M_p = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

7. Za vektore $\vec{a} = (1, 1, -3)$ i $\vec{b} = (-3, -3, 9)$ važi: 1) $\vec{a} \parallel \vec{b}$ 2) $\vec{a} \perp \vec{b}$ 3) $\vec{a} \parallel \vec{b}$ 4) $\vec{a} \perp \vec{b}$

8. Neka je $ABCD$ paralelogram, gde mu je BD dijagonala. Tada u zavisnosti od $\vec{r}_D$, $\vec{r}_B$ i $\vec{r}_A$ napisati vektor položaja tačke C : $\vec{r}_C = \vec{r}_B - \vec{r}_A + \vec{r}_D$

9. ○ Odrediti sve vrednosti realnog parametara a za koje je sistem linearnih jednačina
- $$\begin{aligned} x + ay &= a \\ -x + ay &= a \end{aligned}$$
- 1) kontradiktoran:
 2) određen: $a \neq 0$
 3) 1 puta neodređen: $a = 0$
 4) 2 puta neodređen:

10. ○ Ako je A regularna kvadratna matrica i $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, tada važi: ① $(\alpha A)^{-1} = \frac{1}{\alpha} A^{-1}$ ② $(\alpha A)^{-1} = \alpha A^{-1}$
 ③ $(\alpha A)^{-1} = \alpha \frac{1}{\det A} A^{-1}$ ④ $(\alpha A)^{-1} = A^{-1} \alpha$ ⑤ $(\alpha A)^{-1} = A^{-1} \alpha^{-1}$ ⑥ $(\alpha A)^{-1} = \alpha^{-1} A^{-1}$

11. ○ Neka je $ABCD$ paralelogram, a tačke P i Q redom sredine duži AC i BP . (BD je dijagonala paralelograma). Izraziti vektor $\vec{AQ}$ kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{a} = \vec{BD}$ i $\vec{b} = \vec{BC}$. $\vec{AQ} = -\frac{1}{4}\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b}$

12. ○ Napisati $\vec{x} = (4, 1, 4)$ kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{a} = (1, 0, -1)$, $\vec{b} = (0, -1, 1)$ i $\vec{c} = (1, 1, 1)$: $\vec{x} =$

13. ○ Naći vektor položaja projekcije A' tačke $A(1, 1, -1)$ na ravan $x + y + 2z = 0$: $\vec{r}_{A'} = (1, 1, -1)$

14. ○ Koji od vektora su karakteristični vektori za matricu $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$? ① $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ ② $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ ③ $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$

15. ○ Da li je $|(\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} - \vec{b})| = |\vec{a} + \vec{b}| \cdot |\vec{a} - \vec{b}|$? (DA) NE (Napomena $|\vec{a}| = a$ i $|\vec{b}| = b$)

16. ○ Za vektorski prostor $\mathbb{R}^5$ i svaku sirjektivnu linearnu transformaciju $f: \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^5$ sledi da je transformacija f :

- ① injektivna ② bijektivna ③ izomorfizam ④ ništa od prethodnog.

17. ○ Za svaki vektorski prostor V i svaku injektivnu linearnu transformaciju $f: V \rightarrow V$ sledi da je f :

- ① sirjektivna ② bijektivna ③ izomorfizam ④ ništa od prethodnog

18. ○ Ako su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ nekolinearni vektori, da li je $|(\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} - \vec{b})| = |\vec{a} + \vec{b}| \cdot |\vec{a} - \vec{b}|$? (DA) NE
 (Napomena $|\vec{a}| = a$ i $|\vec{b}| = b$)

19. ○ Za koje vrednosti parametara $a, b \in \mathbb{R}$ navedene funkcija je linearne transformacija i ako jesu, naći odgovarajuću matricu i diskutovati njen rang:

$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x, y, z) = (x \sin(a+b) - y - z, y)$ $a, b \in \mathbb{R}$ $\begin{bmatrix} \sin(a+b) & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ rang: 2

20. ○ Vektori $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ i $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$ su kolinearni ako: ① $\vec{a} \times \vec{b} = 0$ ② $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$
 ③ $\text{rang} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} = 1$ ④ $\text{rang} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} = 2$ ⑤ $\text{rang} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} \leq 1$ ⑥ $\vec{a}$ i $\vec{b}$ su nezavisni
 ⑦ $(\exists \lambda \in \mathbb{R}) \vec{a} = \lambda \vec{b}$ ⑧ $\vec{a} \parallel \vec{b}$ ⑨ $(\exists \lambda \in \mathbb{R}) (\vec{a} = \lambda \vec{b} \vee \lambda \vec{a} = \vec{b})$ ⑩ $(\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}) \alpha \vec{a} + \beta \vec{b} = 0 \wedge \alpha^2 + \beta^2 \neq 0$

21. ○ Vektori $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$, $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$ i $\vec{c} = c_1\vec{i} + c_2\vec{j} + c_3\vec{k}$ su nekomplanarni ako i samo

ako: ① $\text{rang} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} = 2$ ② $\text{rang} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \leq 3$ ③ $\text{rang} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} = 3$

④ $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$ ⑤ $\vec{a}(\vec{b} \times \vec{c}) = 0$ ⑥ $(\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}) \vec{a} = \alpha \vec{b} + \beta \vec{c}$

⑦ $\alpha \vec{a} + \beta \vec{b} + \gamma \vec{c} = 0 \wedge \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 0$ ⑧ $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ je zavisna.

22. ○ Neka je $\varphi: V \rightarrow \mathbb{R}^3$ definisana sa $\varphi(x_1\vec{i} + x_2\vec{j} + x_3\vec{k}) = (x_1 - x_2, x_1 + x_3, -x_1 - x_2 - x_3)$ gde su $(V, \mathbb{R}, +, \cdot)$ i $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}, +, \cdot)$ vektorski prostori slobodnih vektora i uređenih trojki. Da li je funkcija $\varphi: V \rightarrow \mathbb{R}^3$

- ① linearna transformacija ② injektivna ③ sirjektivna ④ bijektivna ⑤ izomorfizam

23. ○ $(\forall x \in \mathbb{R}) f(x) = 0$, tada $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^5$: ① jeste linearna transformacija ② nije linearna transformacija ③ može a ne mora biti linearna transformacija ④ jeste injektivna ⑤ jeste sirjektivna ⑥ jeste izomorfizam

24. ○ Neka je $(a_1, a_2, \dots, a_m)$ zavisna, a $(c_1, c_2, \dots, c_k)$ nezavisna za prostor V i $\dim V = n$. Tada je moguće
 ① $m \leq k \leq n$ ② $n \leq k \leq m$ ③ $n \leq m \leq k$ ④ $k \leq m \leq n$ ⑤ $k \leq n \leq m$ ⑥ $m \leq n \leq k$

25. 6. Neka je $\vec{r}_A$ vektor položaja tačke $A(1, 1, 1)$, $|\vec{AB}| = 3$ i $|\vec{BC}| = 9$. Odrediti $\vec{r}_C$ ako je $\vec{a} = (1, 2, 2)$, $\vec{b} = (1, 4, 8)$ i ako su vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ istog pravca i suprotnog smera redom sa vektorima $\vec{AB}$ i $\vec{BC}$.

$$\vec{r}_C = (-1, -5, -3)$$

26. 6. Koji od sledećih podskupova $U \subseteq \mathbb{R}^3$ je potprostor i za one koji jesu napiši desno od njih njihovu dimenziju:

1) $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = y + x\}$, $\dim U = 3$

2) $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^4 = 0\}$ $\dim U = 2$

3) $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 4\}$ $\dim U = 2$

4) $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = z = 1\}$ $\dim U = 1$

27. 6. Ako je $f: V \rightarrow V$ izomorfizam prostora V u samog sebe, tada je: 1) f mora biti homomorfizam

2) $\dim(V) = \dim(f(V))$ 3) $f(0) = 0$ (gde je 0 nula-vektor prostora V)

4) za svaku nezavisnu n -torku vektora $(v_1, \dots, v_n)$ iz V , n -torka $(f(v_1), \dots, f(v_n))$ je nezavisna u V

5) za svaku zavisnu n -torku vektora $(v_1, \dots, v_n)$ iz V , n -torka $(f(v_1), \dots, f(v_n))$ je zavisna u V

28. 6. Ako je A kvadratna matrica reda 4, tada je: 1) $\det A = 0 \Rightarrow \text{rang } A = 0$ 2) $\det A = 0 \Leftrightarrow \text{rang } A \leq 3$,

3) $\det A = 0 \Rightarrow \text{rang } A = 4$ 4) $\text{rang } A = 4 \Rightarrow \det A \neq 0$, 5) $\text{rang } A = 4 \Leftarrow \det A \neq 0$,

6) $\text{rang } A = 4 \Leftarrow \exists A^{-1}$.

29. 6. Linearne transformacije $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ i $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ su uvek oblika:

$$f(x, y, z, w) = (2x + y, 3y + z), \quad g(t) = (t, 2t, 3t), \quad h(t) = 2t$$

30. 6. Postoji linearna transformacija $f: \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^4$ za koju važi da je:

1) injektivna

2) bijektivna

3) izomorfizam

4) sirjektivna
5) ništa od prethodnog

31. 6. Postoji linearna transformacija $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^5$ za koju važi da je:

1) sirjektivna

2) bijektivna

3) izomorfizam

4) injektivna
5) ništa od prethodnog

32. 6. Za neki izomorfizam $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ i njegovu matricu A važi:

1) f je injektivna 2) postoji A^{-1}

3) f je sirjektivna 4) f je bijektivna 5) A je regularna 6) $\det A \neq 0$ 7) ništa od prethodnog

33. 6. Za svaki vektorski prostor $\mathbb{R}^n$ postoji homogen sistem linearnih jednačina, čiji skup svih rešenja je vektorski prostor izomorfan prostoru $\mathbb{R}^n$. Zaokruži tačan odgovor DA NE

KOLOKVIJUM 2, PRIMER 5

1. 6. Neka tačke $P(1, 1, 1)$, $Q(1, 0, 1)$ i $R(0, 1, 1)$ pripadaju ravni α . Napisati bar jedan jedinični vektor $\vec{n}$ normalan na α i jedan vektor $\vec{m}$ paralelan sa α , $\vec{n} = (0, 0, 1)$, $\vec{m} = (1, 0, 0)$. Ako je $(A, B, C, D) = (0, 0, 1, -1)$, tada je $Ax + By + Cz + D = 0$ jednačina ravni α . Napisati koordinate tačke $M \in \alpha$ ravni α koja je najbliža koordinatnom početku. $M(0, 0, -1)$.

2. 6. Za koje vrednosti parametra $a \in \mathbb{R}$ sistem linearnih jednačina $x - y = 1 \wedge ax - y + z = 1$ nad poljem realnih brojeva je: 1) neodređen: $a \in \mathbb{R}$ 2) određen: 3) kontradiktoran:

3. 6. Za vektore $\vec{a} = (8, 1, 4)$ i $\vec{b} = (1, 2, 2)$ izračunati: 1) $|\vec{a}| = 9$ 2) $|\vec{b}| = 3$

3) $2\vec{a} - \vec{b} = (15, 0, 6)$ 4) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 18$

5) $\vec{a} \times \vec{b} = (-6, -12, 15)$ 6) $\sin \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{2}{3}$

4. 6. Koje od sledećih uređenih n -torki jesu generatorne za vektorski prostor $\mathbb{R}^3$:

1) $((0, 0, -1), (0, 4, 0), (9, 0, 0))$ 2) $((1, 0, 0), (0, -1, 0))$ 3) $((0, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 0), (1, 2, 3))$

4) $((1, 1, 1), (2, 2, 2), (3, 3, 3))$

$$\begin{bmatrix} 9 \\ 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 7 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \end{bmatrix} \quad \begin{vmatrix} 5 & 5 & 2 \\ 9 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -7 \quad \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

6. Matrice linearnih transformacija $f(x) = (2x, x, x)$, $g(x, y, z) = x$, $h(x, y) = (y, y)$ i $s(x, y, z) = z + x$ su:
- $$M_f = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad M_g = [1 \ 0 \ 0] \quad M_h = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad M_s = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

7. Ispod svake matrice napisati broj koji predstavlja njen rang.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

2 2 2 2 1 2 1 0 1

8. Odrediti sve vrednosti realnog parametara a za koje je sistem linearnih jednačina
- $$\begin{aligned} ax + ay &= a \\ ax + ay &= a \end{aligned}$$
- 1) kontradiktoran: _____
 2) određen: _____
 3) jednostruko neodređen: $a \neq 0$
 4) dvostruko neodređen: $a = 0$

9. Neka je $ABCD$ paralelogram, a tačke P i Q redom sredine duži BC i CD . (BD je dijagonala paralelograma). Izraziti vektor $\vec{PQ}$ kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{a} = \vec{AC}$ i $\vec{b} = \vec{AB}$. $\vec{PQ} = \frac{\vec{a}}{2} - \frac{\vec{b}}{4}$

10. Napisati $\vec{x} = (1, 0, 1)$ kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{a} = (0, 0, 1)$, $\vec{b} = (0, 1, 1)$ i $\vec{c} = (1, 1, 1)$:

$$\vec{x} = \vec{c} - \vec{b} + \vec{a}$$

11. Koordinate projekcije A' tačke $A(9, a, 4)$ na pravu određenu sa $x = 3 \wedge z = 2$ za svako $a \in \mathbb{R}$ su:
- $$A'(3, a, 2)$$

12. Vektor položaja $\vec{r}_T$ tačke prodora prave $p: \vec{r} = \vec{r}_s + t\vec{a}$ kroz ravan $\alpha: \vec{n}\vec{r} = \vec{n}\vec{r}_R$ je $\vec{r}_T = \vec{r}_s + \frac{(\vec{r}_s - \vec{r}_R) \cdot \vec{n}}{\vec{a} \cdot \vec{n}} \vec{a}$

13. Projekcija vektora $\vec{x}$ na ravan $\alpha: \vec{n}\vec{r} = 0$ je: $\text{pr}_{\alpha, \vec{a}}(\vec{x}) = \vec{x} - \vec{n} \frac{\vec{x} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|^2}$

14. Koji od vektora su karakteristični vektori za matricu $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$? a) $\begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} -3 \\ -3 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$

15. Koje od tvrdjenja je tačno za bilo koje komutativne matrice A, B, C reda 2 i svaki skalar λ :

- 1) $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ 2) $(B+C)A = AB+CA$ 3) $\det(\lambda A) = \lambda^3 \det(A)$
 4) $\det(AB) = \det(B)\det(A)$ 5) $(AB)^2 = A^2B^2$ 6) $\text{rang}(AB) = \text{rang}(BA)$
 7) $A(B-C) = BA-CA$ 8) $A(BC) = (BA)C$

16. Neka su a, b i c proizvoljni zavisni vektori. Tada uređena trojka vektora $(2a+b+3c, a-2b+c, b-5c)$ je:

- 1) uvek zavisna 2) uvek nezavisna 3) nekad zavisna, a nekad nezavisna, zavisi od izbora vektora a, b, c .

17. Neka su a, b i c proizvoljni nezavisni vektori. Tada uređena trojka vektora $(a+c, a+b, -a+2c)$ je:

- 1) uvek zavisna 2) uvek nezavisna 3) nekad zavisna, a nekad nezavisna, zavisi od izbora vektora a, b, c .

18. Ako su $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ i $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$ nekolinearni, tada važi: 1) $\vec{a} \times \vec{b} = 0$ 2) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

- 3) $\text{rang} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} = 1$ 4) $\text{rang} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} \leq 2$ 5) $\text{rang} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} \leq 1$ 6) $\vec{a}$ i $\vec{b}$ su zavisni

- 7) $(\exists \lambda \in \mathbb{R}) \vec{a} = \lambda \vec{b}$ 8) $\vec{a} \parallel \vec{b}$ 9) $(\exists \lambda \in \mathbb{R}) (\vec{a} = \lambda \vec{b} \vee \lambda \vec{a} = \vec{b})$ 10) $(\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}) \alpha \vec{a} + \beta \vec{b} = 0 \Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 \neq 0$

19. Vektori $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$, $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$ i $\vec{c} = c_1\vec{i} + c_2\vec{j} + c_3\vec{k}$ su komplanarni ako je:

- 1) $\text{rang} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} = 2$ 2) $\text{rang} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \leq 3$ 3) $\text{rang} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} = 3$

- 4) $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0$ 5) $\vec{a}(\vec{b} \times \vec{c}) = 0$ 6) $(\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}) \vec{a} = \alpha \vec{b} + \beta \vec{c}$

- 7) $\alpha \vec{a} + \beta \vec{b} + \gamma \vec{c} = 0 \Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \neq 0$ 8) $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ je zavisna.

20.

- Neka je $\varphi: V \rightarrow \mathbb{R}^3$ definisana sa $\varphi(x_1\vec{i} + x_2\vec{j} + x_3\vec{k}) = (x_3, x_1 + x_2, x_1 + x_2 + x_3)$ gde su $(V, \mathbb{R}, +, \cdot)$ i $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}, +, \cdot)$ vektorski prostori slobodnih vektora i uređenih trojki. Da li je funkcija $\varphi: V \rightarrow \mathbb{R}^3$

- 1) linearna transformacija 2) injektivna 3) surjektivna 4) bijektivna 5) izomorfizam

21.

• Neka je $\mathcal{M}$ skup svih matrica formata $(2, 5)$ čiji svi elementi su iz skupa realnih brojeva $\mathbb{R}$. Tada je:

- 1) $\text{rang} : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ 2) $\text{rang} : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{N}$ 3) $\text{rang} : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$ 4) $\text{rang} : \mathcal{M} \xrightarrow{1-1} \mathbb{N} \cup \{0\}$
 5) $\text{rang} : \mathcal{M} \xrightarrow{na} \{0, 1, 2, 3\}$

22. • Neka je $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ generatorna u prostoru V , $(c_1, c_2, \dots, c_n)$ nezavisna za prostor V i $\dim V = m$. Tada je

- 1) $m \leq k \leq n$ 2) $n \leq k \leq m$ 3) $n \leq m \leq k$ 4) $k \leq m \leq n$ 5) $k \leq n \leq m$ 6) $m \leq n \leq k$

23. • Neka je $\vec{r}_A$ vektor položaja tačke $A(1, 2, 4)$, $|\vec{AB}| = |\vec{BC}| = 3$. Odrediti $\vec{r}_C$ ako je $\vec{AB} \parallel \vec{a} = (1, 2, 2)$, $\vec{BC} \parallel \vec{b} = (-2, 1, 2)$ i ako su smerovi vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ suprotni smerovima redom vektora $\vec{AB}$ i $\vec{BC}$.

$$\vec{r}_C = (2, -1, 0)$$

24. • Koji od sledećih podskupova $U \subseteq \mathbb{R}^3$ je potprostor i za one koji jesu napiši desno od njih njihovu dimenziju:

1) $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = 0\}$, $\dim U = 2$

2) $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid xy = 0\}$ $\dim U = \text{---}$

3) $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \cdot 1 = 0\}$ $\dim U = 2$

4) $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = x\}$ $\dim U = 3$

25. • Neka je $a = (0, 0, 0)$, $b = (1, 0, 1)$, $c = (1, 0, -1)$, $d = (-1, 0, 1)$, $e = (1, 1, 1)$, $f = (1, 0, 0)$, $g = (2, 0, 2)$. Odrediti dimenzije sledećih potprostora V vektorskog prostora $\mathbb{R}^3$:

26. • Ako je A kvadratna matrica reda 5, tada je: 1) $\det A = 0 \Leftrightarrow \text{rang } A = 0$ 2) $\det A = 0 \Leftrightarrow \text{rang } A \leq 4$,
 3) $\det A = 0 \Rightarrow \text{rang } A = 5$ 4) $\text{rang } A = 5 \Rightarrow \det A \neq 0$, 5) $\text{rang } A = 5 \Leftrightarrow \det A \neq 0$,
 6) $\text{rang } A = 5 \Leftrightarrow \exists A^{-1}$.

27.

• Neka su $\mathbf{a}_1 = (a_{11}, \dots, a_{n1})$, $\mathbf{a}_2 = (a_{12}, \dots, a_{n2})$, ..., $\mathbf{a}_n = (a_{1n}, \dots, a_{nn})$ vektori kolone matrice $A = A_{nn} = [a_{ij}]_{nn}$, neka je $V = \text{Lin}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n) = \{ \alpha_1 \mathbf{a}_1 + \alpha_2 \mathbf{a}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{a}_n \mid \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \}$ i neka je $\mathbf{a}_i^2$ skalarni proizvod vektora $\mathbf{a}_i$ sa samim sobom. Tada je: 1) $\mathbf{a}_1 = \dots = \mathbf{a}_n = 0 \Leftrightarrow \mathbf{a}_1^2 + \dots + \mathbf{a}_n^2 = 0$
 2) $\dim V = 0 \Leftrightarrow \text{rang } A \neq 0$ 3) $\dim V = 0 \Leftrightarrow \mathbf{a}_1 = \dots = \mathbf{a}_n = 0$ 4) $\dim V = 0 \Leftrightarrow \mathbf{a}_1^2 + \dots + \mathbf{a}_n^2 \neq 0$
 5) $\text{rang } A = 0 \Leftrightarrow \mathbf{a}_1 = \dots = \mathbf{a}_n = 0$ 6) $\text{rang } A = 0 \Leftrightarrow \mathbf{a}_1^2 + \dots + \mathbf{a}_n^2 \neq 0$

28.

• Postoji linearna transformacija $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ za koju važi da je: 1) surjektivna
 2) injektivna 3) bijektivna 4) izomorfizam 5) ništa od prethodnog

29.

• Postoji linearna transformacija $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ za koju važi da je: 1) injektivna
 2) surjektivna 3) bijektivna 4) izomorfizam 5) ništa od prethodnog.

30.

• Za svaku surjektivnu linearnu transformaciju $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ sledi da je transformacija f :
 1) injektivna 2) bijektivna 3) izomorfizam 4) ništa od prethodnog.

31.

• Za svaku injektivnu linearnu transformaciju $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ sledi da je transformacija f :
 1) surjektivna 2) bijektivna 3) izomorfizam 4) ništa od prethodnog

32.

• Za svaki izomorfizam $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ i njegovu matricu A važi: 1) f je injektivna 2) postoji A^{-1}
 3) $n = m$ 4) f je surjektivna 5) f je bijektivna 6) A je regularna 7) $\det A \neq 0$ 8) ništa od prethodnog

33.

• Za svaki konačno dimenzioni vektorski prostor V postoji homogen sistem linearnih jednačina, čiji skup svih rešenja je vektorski prostor izomorfan prostoru V . Zakruži tačan odgovor: DA NE

34.

• Neka je $a = (2, 2, 0)$, $b = (-3, 3, 0)$, $c = (1, -1, 0)$, $d = (-1, 1, 0)$, $e = (0, 0, 1)$, $f = (1, 0, 0)$, $g = (1, 2, 0)$. Zaokružiti broj koji je dimenzija potprostora V vektorskog prostora $\mathbb{R}^3$: 1) $V = L(b, c, d) \Rightarrow \dim(V)$ je:

1) 2, 3

2) $V = L(e, f, g) \Rightarrow \dim(V)$ je: 1, 2, 3

3) $V = L(a, b) \Rightarrow \dim(V)$ je: 1, 2, 3

4) $V = L(e, f, g) \Rightarrow \dim(V)$ je: 1, 2, 3

5) $V = L(b, c, e) \Rightarrow \dim(V)$ je: 1, 2, 3

6) $V = L(a, b, c) \Rightarrow \dim(V)$ je: 1, 2, 3

7) $V = L(a, g) \Rightarrow \dim(V)$ je: 1, 2, 3

35. • Koje od tvrdjenja je tačno za bilo koje kvadratne matrice A, B, C reda 2 i svaki skalar λ :
- ① $A(BC) = (AB)C$ ② $(B+C)A = BA + CA$ ③ $(AB)^2 = A^2B^2$ ④ $A - B = B - A$
 ⑤ $\det(AB) = \det(B)\det(A)$ ⑥ $\text{rang}(AB) = \text{rang}(A)\text{rang}(B)$ ⑦ $\det(A \cdot B) = \det(A) + \det(B)$
 ⑧ $\det(\lambda A) = \lambda \det(A)$
36. • Neka su a, n, x matrice kolone istog formata nad poljem $\mathbb{R}$. Tada je: ① $(n^T x)a = (an^T)x$
 ② $(n^T a)x = (xn^T)a$ ③ $n^T a = a^T n$ ④ $na = an$ ⑤ $(n^T x)a = n^T(xa)$ ⑥ $a^T n = 0 \Rightarrow a \perp n$
 Napomena $[\lambda] \cdot A \stackrel{\text{def}}{=} \lambda A$, za svaku matricu A .

KOLOKVIJUM 2, PRIMER 6

1. • Za ravan $\alpha: z = 1$ napisati jedan njen vektor normale $\vec{n}_\alpha = (0, 0, 1)$ i koordinate neke njene tri različite nekolinearne tačke $A(0, 0, 1)$, $B(1, 0, 1)$, $C(0, 1, 1)$.
2. • Ako je $\vec{a} = (1, 0, 1)$ i $\vec{b} = (0, 2, 0)$, tada je
 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 90^\circ$ $\vec{a} \times \vec{b} = (-2, 0, 2)$
3. • Za koje vrednosti parametra $a \in \mathbb{R}$ sistem jednačina $ax + y = 1 \wedge x + ay = a$ nad poljem realnih brojeva je: 1) neodređen: $a = 1 \vee a = -1$ 2) određen: $a \neq 1 \wedge a \neq -1$ 3) kontradiktoran: /
4. • $\odot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot [1 \ -1 \ 0] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} [1 \ -1 \ 0] \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = [0] \quad \begin{bmatrix} 7 & -6 \\ 8 & -7 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & -6 \\ 8 & -7 \end{bmatrix}$
5. • Zaokružiti cifru (cifre) ispred uređenih n -torki koje su GENERATORNE u vektorskom prostoru trojki $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$: ① $((0, 1, 0))$ ② $((1, 2, 0), (1, 1, 0), (2, -1, 1))$ ③ $((1, 0, 0), (2, 0, 2))$
 ④ $((1, 0, 0), (0, 2, 0), (0, 0, 3))$ ⑤ $((1, 1, 1), (2, 2, 2))$ ⑥ $((0, 0, 2), (0, 0, 0), (3, 0, 0))$
 ⑦ $((0, 1, 0), (0, 2, 0))$ ⑧ $((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 2, 3))$
6. • Ispod svake matrice napisati broj koji predstavlja njen rang.
 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ 3 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 2 $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 2 $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 2 $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ 1 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ 2 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 1 $[0 \ 0 \ 0]$ 0
7. • Matrice i rangovi linearnih transformacija $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x) = (0, 9x)$ i $g, h, r, s: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$,
 $g(x, y, z) = (x+y, x+z)$, $h(x, y, z) = (x-y, 0)$, $r(x, y, z) = (0, y)$, $s(x, y, z) = (x-y-z, 6y)$ i $p(x, y, z) = (z, 0)$ su: (Rang upisati ispod odgovarajuće matrice)
 $M_f = \begin{bmatrix} 0 \\ 9 \end{bmatrix}$ $M_g = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $M_h = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $M_r = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $M_s = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 6 & 6 \end{bmatrix}$ $M_p = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
8. • Neka je $ABCD$ paralelogram, gde mu je BD dijagonala, a S presek dijagonala. U zavisnosti od $\vec{r}_S$, $\vec{r}_B$ i $\vec{r}_A$ napisati vektore položaja tačaka C i D $\vec{r}_C = 2\vec{r}_S - \vec{r}_A$ $\vec{r}_D = 2\vec{r}_S - \vec{r}_B$
- *****
9. • Odrediti sve vrednosti realnog parametara a za koje je sistem linearnih jednačina
 $ax + ay = a$
 $x + y = a$
 1) kontradiktoran: $a \neq 0 \wedge a \neq 1$
 2) određen: /
 3) 1 puta neodređen: $a = 0 \vee a = 1$
 4) 2 puta neodređen: /
10. • Neka je $ABCD$ paralelogram, a tačke P i Q redom sredine duži BC i AB . (BD je dijagonala paralelograma). Izraziti vektor $\vec{DQ} + \vec{DP}$ kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{a} = \vec{AC}$ i $\vec{b} = \vec{BD}$.
 $\vec{DQ} + \vec{DP} = -\frac{3}{2}\vec{b}$
11. • Izraziti vektor $\vec{x} = (1, 2, 2)$ kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{a} = (1, 2, 1)$, $\vec{b} = (1, 1, -1)$ i $\vec{c} = (1, 1, 0)$:
 $\vec{x} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$

12. U vektorskom prostoru $(\mathbb{R}^5, \mathbb{R}, +, \cdot)$, petorka vektora (a, b, c, d, e) je:
~~1) uvek zavisna~~ ~~2) nikad baza,~~ 3) može ali ne mora da bude generatorna.

13. U vektorskom prostoru $(\mathbb{R}, \mathbb{R}, +, \cdot)$, par vektora (a, b) je:
~~1) uvek nezavisan,~~ 2) uvek zavisan, ~~3) nekad nezavisan a nekad zavisan.~~

14. Koji od vektora su karakteristični vektori za matricu $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$? 1) $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ 2) $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ 3) $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$

15. Ako je matrica A' dobijena od matrice $A = [a_{ij}]_{nn}$, $a_{ij} \in \mathbb{R}$ elementarnim transformacijama, tada je:
1) $|det(A)| = \lambda |det(A')|$ za neko $\lambda \in \mathbb{R}$ 2) $\text{rang}(A) = \text{rang}(A')$ ~~3) $A \cdot A' = I$~~ 4) $det A \neq 0 \Leftrightarrow det A' \neq 0$

16. Koje od tvrđenja je tačno za bilo koje matrice A, B, C reda 2 nad poljem $\mathbb{R}$ i svaki skalar $\lambda \in \mathbb{R}$:

- ~~1) $det(AB) = det(A) + det(B)$~~ ~~2) $(B+C)A = BA + CA$~~ ~~3) $det(\lambda A) = \lambda det(A)$~~
4) $det(AB) = det(B)det(A)$ 5) $(AB)^2 = A^2B^2$ 6) $\text{rang}(AB) = \text{rang}(A)\text{rang}(B)$
~~7) $A(B+C) = BA + CA$~~ 8) $A(BC) = (AB)C$

17. Koja od sledećih tvrdnji je tačna za svaka dva slobodna nenula vektora $\vec{x}$ i $\vec{a}$:

- a) $(\vec{a} - \text{pr}_{\vec{x}}\vec{a})\vec{x} = 0$ b) $(\vec{x} - \text{pr}_{\vec{a}}\vec{x})\vec{a} = 0$ ~~c) $(\vec{a} - \text{pr}_{\vec{x}}\vec{a}) \times \vec{x} = 0$~~ ~~d) $(\vec{x} - \text{pr}_{\vec{a}}\vec{x}) \times \vec{a} = 0$~~
~~e) ništa od prethodnog~~

18. Neka su a, b i c proizvoljni vektori. Tada uređena trojka vektora $(a+b+c, b+c, b-c)$ je:
~~a) uvek zavisna~~ ~~b) uvek nezavisna~~ c) nekad zavisna, a nekad nezavisna, zavisi od izbor vektora a, b, c .

19. Neka su a, b i c nezavisni vektori. Tada uređena trojka vektora $(a+c, a+b, a-b+2c)$ je:
a) uvek zavisna ~~b) uvek nezavisna~~ ~~c) nekad zavisna, a nekad nezavisna, zavisi od izbor vektora a, b, c .~~

20. Vektori $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ i $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$ su **nekolinearni** akko je: 1) $\vec{a} \times \vec{b} \neq 0$ ~~2) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$~~
~~3) $\text{rang} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} = 1$~~ ~~4) $\text{rang} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} \leq 2$~~ 5) $\text{rang} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} = 2$ ~~6) $\vec{a}$ i $\vec{b}$ su zavisni~~
~~7) $(\exists \lambda \in \mathbb{R}) \vec{a} \neq \lambda \vec{b}$~~ ~~8) $\vec{a} \parallel \vec{b}$~~ 9) $(\forall \lambda \in \mathbb{R}) (\vec{a} \neq \lambda \vec{b} \wedge \lambda \vec{a} \neq \vec{b})$ 10) $\alpha \vec{a} + \beta \vec{b} = 0 \Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 = 0$

21. Ako je $\vec{x} = x_1\vec{i} + x_2\vec{j} + x_3\vec{k}$ i $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definisana sa $f(x_1, x_2, x_3) = \vec{m} \cdot \vec{x}$ i $\vec{m} \neq 0$, tada funkcija f **uvek** jeste: 1) linearna transformacija ~~2) injektivna~~ ~~3) surjektivna~~ ~~4) bijektivna~~ ~~5) izomorfizam~~

22. Za neku linearnu transformaciju $f: \mathbb{R} \xrightarrow{1-1} \mathbb{R}$ i svako $x, y, \lambda, v \in \mathbb{R}$ tačno je: 1) $x = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$
2) $f(0) = 0$ 3) $f(xy) = yx$ 4) $f(xy) = yf(x)$ 5) $f(x) = ax + 0$ za neko $a \in \mathbb{R}$
6) $f(2\lambda - v) = 2f(\lambda) - f(v)$

23. Neka je $\varphi: V \rightarrow \mathbb{R}^3$ definisana sa $\varphi(x_1\vec{i} + x_2\vec{j} + x_3\vec{k}) = (x_1, x_2, x_1)$, gde su $(V, \mathbb{R}, +, \cdot)$ i $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}, +, \cdot)$ vektorski prostori slobodnih vektora i uređenih trojki. Da li je funkcija $\varphi: V \rightarrow \mathbb{R}^3$
1) linearna transformacija ~~2) injektivna~~ ~~3) surjektivna~~ ~~4) bijektivna~~ ~~5) izomorfizam~~

24. Neka je $\mathcal{M}$ skup svih kvadratnih matrica reda 1 čiji elementi su iz skupa realnih brojeva $\mathbb{R}$. Tada je:
1) $det: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ 2) $det: \mathcal{M} \xrightarrow{1-1} \mathbb{R}$ 3) $det: \mathcal{M} \xrightarrow{na} \mathbb{R}$ 4) $det: \mathcal{M} \xrightarrow{1-1} \mathbb{R}$ 5) det je linearna

25. Neka je $\mathcal{M}$ skup svih matrica formata $(1, 2)$ čiji svi elementi su iz skupa realnih brojeva $\mathbb{R}$. Tada je:
1) $\text{rang}: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ ~~2) $\text{rang}: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{N}$~~ ~~3) $\text{rang}: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$~~ 4) $\text{rang}: \mathcal{M} \xrightarrow{na} \{0, 1\}$ ~~5) $\text{rang}: \mathcal{M} \xrightarrow{na} \{0, 1, 2\}$~~

26. Ako je $f(x+y) = f(x) + f(y)$, tada f : ~~1) jeste linearna transformacija~~ 2) nije linearna transformacija
3) može a ne mora biti linearna transformacija ~~4) jeste linearna transformacija ako je $f(ax) = af(x)$~~

27. Neka je $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ generatorna u prostoru V , $(c_1, c_2, \dots, c_m)$ nezavisna za prostor V i $\dim V = 4$. Tada je 1) $m \leq 4 \leq n$ ~~2) $n \leq 4 \leq m$~~ ~~3) $n \leq m \leq 4$~~ ~~4) $4 \leq m \leq n$~~ ~~5) $4 \leq n \leq m$~~
~~6) $m \leq n \leq 4$~~

28. Neka je $\vec{r}_A$ vektor položaja tačke A , $|\vec{AB}| = 2$ i $|\vec{BC}| = 3$. Odrediti $\vec{r}_C$ u zavisnosti od $\vec{r}_A$, $\vec{a}$ i $\vec{b}$, ako je $\vec{AB} \parallel \vec{a}$, $\vec{BC} \parallel \vec{b}$ i vektori $\vec{AB}$ i $\vec{a}$ su istog smera, a vektori $\vec{BC}$ i $\vec{b}$ suprotnog. $\vec{r}_C = \vec{r}_A + 2 \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} - 3 \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$

29. Neka je ℓ -torka vektora $(b_1, b_2, \dots, b_\ell)$ zavisna i neka je $(0, d_2, \dots, d_k)$ neka k -torka vektora. Tada je:
1) $k \leq \ell$ 2) $\ell \leq k$ 3) $k = \ell$ 4) $\ell < k$ 5) $\ell > k$ 6) ništa od prethodnog

30. Koji od sledećih podskupova $U \subseteq \mathbb{R}^3$ je potprostor i za one koji jesu napiši desno od njih njihovu dimenziju:
 ① $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0\}$, $\dim U = 2$
 ② $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 0\}$ $\dim U = 1$
 ③ $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \cdot 0 = 0\}$ $\dim U = 3$
 ④ $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 0\}$ $\dim U = 0$
31. Ako je A kvadratna matrica reda 2, tada je:
 ① $\det A = 0 \Rightarrow \text{rang } A = 0$ ② $\det A = 0 \Leftarrow \text{rang } A \leq 1$,
 ③ $\det A = 0 \Leftarrow \text{rang } A = 1$ ④ $\text{rang } A = 1 \Rightarrow \det A \neq 0$, ⑤ $\text{rang } A = 1 \Leftarrow \det A \neq 0$,
 ⑥ $\text{rang } A = 2 \Leftarrow \exists A^{-1}$.
32. Linearne transformacije $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, i $G: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ su uvek oblika:
 $f(x, y) = \begin{pmatrix} 2x + 3y \\ x - y \\ x + y \end{pmatrix}$, $g(x, y) = 2x + 3y$, $h(x) = 2x$, $F(x, y, z) = \begin{pmatrix} x + 2y + 3z \\ 2x + y + z \end{pmatrix}$, $G(x) = \begin{pmatrix} 2x \\ 3x \end{pmatrix}$
33. Linearne transformacije f i g definisane su sa $f(x_1, x_2) = (x_1 - x_2, 2x_1 + x_2)$ i $g(x_1, x_2) = (x_1 - x_2, x_1 + x_2)$.
 a) Po definiciji kompozicije o odrediti $(f \circ g)(x_1, x_2) = f(g(x_1, x_2)) = (-2x_1, 3x_1 - x_2)$
 b) Napisati matrice M_f i M_g koje odgovaraju linearnim transformacijama f i g
 $M_f = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $M_g = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$
 c) Izračunati proizvod matrica $M_f \cdot M_g = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$, $M_g^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$ i $g^{-1}(x_1, x_2) = (\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2, -\frac{1}{2}x_1)$
 d) Napisati linearnu transformaciju $h(x_1, x_2)$ kojoj odgovara matrica $M_f \cdot M_g$ tj. $h(x_1, x_2) = (-2x_1, 3x_1 - x_2)$
 e) Da li je $h = f \circ g$ tj. da li je $(\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}) h(x_1, x_2) = (f \circ g)(x_1, x_2)$? **DA** NE
34. Neka su a, n, x matrice kolone istog formata nad poljem $\mathbb{R}$. Tada je:
 ① $(n^T a)x = (an^T)x$
 ② $(n^T a)x = (xn^T)a$ ③ $n^T a = a^T n$ ④ $na = an$ ⑤ $(n^T x)a = n^T(xa)$ ⑥ $a^T n = 0 \Rightarrow a \perp n$
 Napomena $[\lambda] \cdot A \stackrel{\text{def}}{=} \lambda A$, za svaku matricu A .

KOLOKVIJUM 2, PRIMER 7

1. Za ravan α kojoj pripadaju tačke $A(3, 0, 0)$, $B(0, 3, 0)$ i $C(0, 0, 3)$ napisati jedan njen vektor normale $\vec{n}_\alpha = (1, 1, 1)$ i koordinate njene tačke $M(1, 1, 1)$ koja je jednako udaljena od koordinatnih osa. Takvih tačaka M ima: ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ više od 4
2. Ako je $\vec{a} = (0, -1, 1)$ i $\vec{b} = (-1, 0, 1)$, tada je $|\vec{a}| = \sqrt{2}$ $|\vec{b}| = \sqrt{2}$ $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1$ $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{2}$ $\vec{a} \times \vec{b} = (-1, -1, -1)$.
3. Za koje vrednosti parametra $a \in \mathbb{R}$ sistem jednačina $ax + y = 1 \wedge ax - y = a$ nad poljem realnih brojeva je: 1) neodređen: / 2) određen: $a \neq 0$ 3) kontradiktoran: $a = 0$
4. $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$ $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 2 & 7 & 9 \end{vmatrix} = -8$ $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -6 \end{bmatrix}^{-1} = /$
5. Zaokružiti cifru (cifre) ispred uređenih n -torki koje su ZAVISNE u vektorskom prostoru uređenih trojaka $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$:
 ① $((0, 1, 0))$ ② $((1, 2, 1), (1, 1, 0), (2, 3, 1))$ ③ $((1, 0, 0), (2, 0, 2))$
 ④ $((1, 0, 0), (0, 2, 0), (0, 0, 3))$ ⑤ $((1, 1, 1), (2, 2, 2))$ ⑥ $((0, 0, 2), (0, 0, 0), (3, 0, 0))$
 ⑦ $((0, 1, 0), (0, 2, 0))$ ⑧ $((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 2, 3))$
6. Ispod svake matrice napisati broj koji predstavlja njen rang.
 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ 3 $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ 1 $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ 1 $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 2 $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ 1 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ 2 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 1 $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 0

7. Matrice i rangovi linearnih transformacija $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x) = (0, 9x)$ i $g, h, r, s, p: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $g(x, y, z) = (x + y, x + z)$, $h(x, y, z) = (x - y, 0)$, $r(x, y, z) = (0, y)$, $s(x, y, z) = (x - y - z, 6y)$ i $p(x, y, z) = (z, 0)$ su:
(Rang upisati ispod odgovarajuće matrice)

$$M_f = \begin{bmatrix} 0 \\ 9 \end{bmatrix} \quad M_g = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad M_h = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad M_r = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad M_s = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 6 & 0 \end{bmatrix} \quad M_p = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

8. Neka je $ABCD$ paralelogram, gde mu je BD dijagonala, a S presek dijagonala. U zavisnosti od $\vec{r}_A, \vec{r}_B$ i $\vec{r}_D$ napisati vektore položaja tačaka S i C . $\vec{r}_S = \frac{\vec{r}_B + \vec{r}_D}{2}$ $\vec{r}_C = \vec{r}_B + \vec{r}_D - \vec{r}_A$

9. Odrediti sve vrednosti realnog parametra a za koje je sistem linearnih jednačina
 $ax + ay = a$
 $ax + ay = a$
 1) kontradiktoran:
 2) određen:
 3) 1 puta neodređen: $a \neq 0$
 4) 2 puta neodređen: $a = 0$
10. Neka je $ABCD$ paralelogram, a tačke P i Q redom sredine duži AD i DC . (BD je dijagonala paralelograma). Izraziti vektor $\vec{BQ} + \vec{BP}$ kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{a} = \vec{AC}$ i $\vec{b} = \vec{BD}$.
 $\vec{BQ} + \vec{BP} = \frac{3}{2}\vec{a}$
11. Izraziti vektor $\vec{x} = (1, 0, -2)$ kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{a} = (1, 2, 1)$, $\vec{b} = (1, 1, -1)$ i $\vec{c} = (1, 1, 0)$:
 $\vec{x} = -\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$
12. U vektorskom prostoru $(\mathbb{R}^5, \mathbb{R}, +, \cdot)$, petorka vektora (a, b, c, d, e) je:
 1) uvek zavisna 2) nikad baza, 3) može ali ne mora da bude generatorna.
13. U vektorskom prostoru $(\mathbb{R}, \mathbb{R}, +, \cdot)$, vektor $a \neq 0$ je:
 1) uvek nezavisan, 2) uvek zavisna, 3) uvek baza.
14. Koji od vektora su karakteristični vektori za matricu $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$? a) $\begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} -3 \\ -3 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$
15. Ako je matrica A' dobijena od matrice $A = [a_{ij}]_{nn}$, $a_{ij} \in \mathbb{R}$ elementarnim transformacijama, tada je:
 1) $(\exists \lambda \in \mathbb{R}) |det(A')| = \lambda |det(A)|$ 2) $\text{rang}(A) = \text{rang}(A')$
 3) $\det A = 0 \Leftrightarrow \det A' = 0$ 4) $\det A \neq 0 \Leftrightarrow \det A' \neq 0$
16. Koje od tvrdjenja je tačno za bilo koje komutativne matrice A, B, C reda 4 nad poljem $\mathbb{R}$ i svaki skalar $\lambda \in \mathbb{R}$:
 1) $\det(AB) = \det(A) + \det(B)$ 2) $(B + C)A = BA + CA$ 3) $\det(\lambda A) = \lambda^4 \det(A)$
 4) $\det(AB) = \det(B)\det(A)$ 5) $(AB)^2 = A^2B^2$ 6) $\text{rang}(AB) = \text{rang}(A)\text{rang}(B)$
 7) $A(B + C) = BA + CA$ 8) $A(BC) = (AB)C$
17. Koja od sledećih tvrdnji je tačna za svaka dva slobodna nenula vektora $\vec{x}$ i $\vec{a}$:
 a) $(\vec{a} - \text{pr}_{\vec{x}}\vec{a})\vec{x} = 0$
 b) $(\vec{x} - \text{pr}_{\vec{a}}\vec{x})\vec{a} = 0$ c) $(\vec{a} - \text{pr}_{\vec{x}}\vec{a}) \times \vec{x} = 0$ d) $(\vec{x} - \text{pr}_{\vec{a}}\vec{x}) \times \vec{a} = 0$ e) ništa od prethodnog
18. Neka su a, b i c proizvoljni nezavisni vektori. Tada uređena trojka vektora $(a + b + c, b + c, b - c)$ je:
 a) uvek zavisna b) uvek nezavisna c) nekad zavisna, a nekad nezavisna, zavisi od izbor vektora a, b, c .
19. Neka su a, b i c zavisni vektori. Tada uređena trojka vektora $(a + c, a + b, a - b + c)$ je:
 a) uvek zavisna b) uvek nezavisna c) nekad zavisna, a nekad nezavisna, zavisi od izbor vektora a, b, c .
20. Vektori $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$, $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$ i $\vec{c} = c_1\vec{i} + c_2\vec{j} + c_3\vec{k}$ su nekomplanarni akko je:
 1) $\text{rang} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} = 2$ 2) $\text{rang} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \leq 3$ 3) $\text{rang} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} = 3$
 4) $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0$ 5) $\vec{a}(\vec{b} \times \vec{c}) \neq 0$ 6) $(\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}) \vec{a} = \alpha\vec{b} + \beta\vec{c}$
 7) $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = 0 \Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 0$ 8) $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ je zavisna.
21. Ako je $\vec{x} = x_1\vec{i} + x_2\vec{j} + x_3\vec{k}$ i $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definisana sa $f(x_1, x_2, x_3) = \vec{m} \cdot \vec{x}$, tada funkcija f uvek jeste:
 1) linearna transformacija 2) injektivna 3) surjektivna 4) bijektivna 5) izomorfizam

22. • Za svaku nenula linearnu transformaciju $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ i svako $x, y, \lambda, v \in \mathbb{R}$ tačno je: 1) $x=0 \Leftrightarrow f(x)=0$
 2) $f(0)=0$ 3) $f(xy)=yx$ 4) $f(xy)=yf(x)$ 5) $f(x)=ax$ za neko $a \in \mathbb{R}$ 6) f je izomorfizam
23. • Neka je $\varphi: V \rightarrow \mathbb{R}^3$ definisana sa $\varphi(x_1\vec{i} + x_2\vec{j} + x_3\vec{k}) = (x_1 + x_2, x_1 + x_3, x_2 + x_3)$, gde su $(V, \mathbb{R}, +, \cdot)$ i $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}, +, \cdot)$ vektorski prostori slobodnih vektora i uređenih trojki. Da li je funkcija $\varphi: V \rightarrow \mathbb{R}^3$
 1) linearna transformacija 2) injektivna 3) surjektivna 4) bijektivna 5) izomorfizam
24. • Neka je M skup svih kvadratnih matrica reda 2 čiji elementi su iz skupa realnih brojeva $\mathbb{R}$. Tada je:
 1) $\det: M \rightarrow \mathbb{R}$ 2) $\det: M \xrightarrow{1-1} \mathbb{R}$ 3) $\det: M \xrightarrow{na} \mathbb{R}$ 4) $\det: M \xrightarrow{1-1}_{na} \mathbb{R}$ 5) $\det$ je linearna transformacija
25. • Neka je M skup svih matrica formata $(3, 2)$ čiji svi elementi su iz skupa realnih brojeva $\mathbb{R}$. Tada je:
 1) $\text{rang}: M \rightarrow \mathbb{R}$ 2) $\text{rang}: M \rightarrow \mathbb{N}$ 3) $\text{rang}: M \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$ 4) $\text{rang}: M \rightarrow \{0, 1, 2\}$
 5) $\text{rang}: M \xrightarrow{na} \{0, 1, 2\}$
26. • Neka je $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ generatorna u prostoru V , $(c_1, c_2, \dots, c_m)$ zavisna za prostor V i $\dim V = 4$. Tada je
 1) $m \leq 4 \leq n$ 2) $n \leq 4 \leq m$ 3) $n \leq m \leq 4$ 4) $4 \leq m \leq n$ 5) $4 \leq n \leq m$ 6) $n \geq 4$
27. • Neka je $\vec{r}_A$ vektor položaja tačke A , $|\vec{AB}| = 5$ i $|\vec{BC}| = 7$. Odrediti $\vec{r}_C$ u zavisnosti od $\vec{r}_A$, $\vec{i}$ i $\vec{j}$, ako je $\vec{AB} \parallel \vec{i}$, $\vec{BC} \parallel \vec{j}$ i vektori $\vec{AB}$ i $\vec{i}$ su istog smera, a vektori $\vec{BC}$ i $\vec{j}$ suprotnog. $\vec{r}_C = \vec{r}_A + 5\vec{i} - 7\vec{j}$
28. • Neka je ℓ -torka vektora $(b_1, b_2, \dots, b_\ell)$ nezavisna i $(d_1, d_2, \dots, d_k)$ generatorna k -torka vektora. Tada je:
 1) $k \leq \ell$ 2) $\ell \leq k$ 3) $k = \ell$ 4) $\ell < k$ 5) $\ell > k$ 6) ništa od prethodnog
29. • Koji od sledećih podskupova $U \subseteq \mathbb{R}^3$ je potprostor i za one koji jesu napiši desno od njih njihovu dimenziju:
 1) $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y^2 = 0\}$, $\dim U = 1$
 2) $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 - y^2 = 0\}$, $\dim U = \underline{\hspace{1cm}}$
 3) $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \cdot 3 = 0\}$, $\dim U = 2$
 4) $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \geq 0\}$, $\dim U = 3$
30. • Ako je A kvadratna matrica reda 4, tada je: 1) $\det A = 0 \Rightarrow \text{rang } A = 0$ 2) $\det A = 0 \Leftrightarrow \text{rang } A \leq 3$,
 3) $\det A = 0 \Leftrightarrow \text{rang } A = 3$ 4) $\text{rang } A = 3 \Rightarrow \det A \neq 0$, 5) $\text{rang } A = 3 \Leftrightarrow \det A \neq 0$,
 6) $\text{rang } A = 4 \Leftrightarrow \exists A^{-1}$.
31. • Linearne transformacije $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, i $G: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ su uvek oblika:
 $f(x, y) = (2x, 3y, x+y)$, $g(x, y) = 2x + 3y$, $h(x) = 2x$, $F(x, y, z) = (2x, 3y)$, $G(x) = (2x, 3x)$
32. • Linearne transformacije f i g definisane su sa $f(x_1, x_2) = (x_1 - x_2, 2x_1 + x_2)$ i $g(x_1, x_2) = (x_1 - x_2, x_1 - x_2)$
 a) Po definiciji kompozicije $\circ$ odrediti $(f \circ g)(x_1, x_2) = f(g(x_1, x_2)) = (0, 3x_1 - 2x_2)$
 b) Napisati matrice M_f i M_g koje odgovaraju linearnim transformacijama f i g :
 $M_f = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $M_g = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$
 c) Izračunati proizvod matrica $M_f \cdot M_g = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$, $M_g^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ i $g^{-1}(x_1, x_2) = \underline{\hspace{1cm}}$
 d) Napisati linearnu transformaciju $h(x_1, x_2)$ kojoj odgovara matrica $M_f \cdot M_g$ tj. $h(x_1, x_2) = (0, 3x_1 - 2x_2)$
 e) Da li je $h = f \circ g$ tj. da li je $(\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}) h(x_1, x_2) = (f \circ g)(x_1, x_2)$? (DA) NE
33. • Neka su a, n, x matrice kolone istog formata nad poljem $\mathbb{R}$. Tada je: 1) $(n^T x)a = (an^T)x$
 2) $(n^T a)x = (xn^T)a$ 3) $n^T a = a^T n$ 4) $na = an$ 5) $(n^T x)\vec{a} = n^T(xa)$ 6) $a^T n = 0 \Rightarrow a \perp n$
 Napomena $[A] \cdot A \stackrel{\text{def}}{=} \lambda A$, za svaku matricu A .

7. ☒ Neka tačke $O(0,0,0)$, $A(1,0,1)$ i $B(1,1,1)$ pripadaju ravni α . Napisati vektor $\overrightarrow{AB} = (0, 1, 0)$. Napisati bar jedan vektor $\vec{n}$ normalan na α , $\vec{n} = (-1, 0, 1)$. Ako je $(A, B, C, D) = (-1, 0, 1, 0)$, tada je $Ax + By + Cz + D = 0$ jednačina ravni α . Napisati bar jednu tačku $M \in \alpha$ i $M \notin \{O, A, B\}$, $M(-1, 1, 1)$.

2. ☒ Ako je $\vec{a} = (2, -1, 1)$ i $\vec{b} = (-1, 1, 1)$, tada je
 $|\vec{a}| = \sqrt{6}$ $|\vec{b}| = \sqrt{3}$ $\vec{a} \cdot \vec{b} = -2$ $\cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{-2}{\sqrt{6}\sqrt{3}} = -\frac{2}{3\sqrt{2}}$ $\vec{a} \times \vec{b} = (-2, -3, 1)$

3. ☒ Za koje vrednosti parametra $a \in \mathbb{R}$ sistem jednačina $ax + y = 1 \wedge -x + ay = a$ nad poljem realnih brojeva je:
 1) neodređen: ☒ 2) određen: $a \in \mathbb{R}$ 3) kontradiktoran: ☒

4. ☒ $\begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$ $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 2 & 7 & 9 \end{vmatrix} = -8$ $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -6 \end{bmatrix}^{-1} =$

5. ☒ Zaokružiti cifru (cifre) ispred uređenih n -torki koje su NEZAVISNE u vektorskom prostoru uređenih trojaka $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$:
 1) $((0, 1, 0))$ 2) $((1, 2, 1), (1, 1, 0), (2, 3, 1))$ 3) $((1, 0, 0), (2, 0, 2))$
 4) $((1, 0, 0), (0, 2, 0), (0, 0, 3))$ 5) $((1, 1, 1), (2, 2, 2))$ 6) $((0, 0, 2), (0, 0, 0), (3, 0, 0))$
 7) $((0, 1, 0), (0, 2, 0))$ 8) $((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 2, 3))$

6. ☒ Ispod svake matrice napisati broj koji predstavlja njen rang.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

7. ☒ Matrice i rangovi linearnih transformacija $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x) = (x, x)$ i $g, h, r, s, p: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $g(x, y, z) = (x+x, z+z)$, $h(x, y, z) = (x, z)$, $r(x, y, z) = (x, y)$, $s(x, y, z) = (x, x+y+z)$ i $p(x, y, z) = (0, 0)$ su: (Rang upisati ispod odgovarajuće matrice)

$$M_f = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad M_g = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad M_h = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad M_r = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad M_s = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad M_p = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

8. ☒ Neka je $ABCD$ paralelogram, gde mu je BD dijagonala, a S presek dijagonala. U zavisnosti od $\vec{r}_A$, $\vec{r}_D$ i $\vec{r}_S$ napisati vektore položaja tačaka B i C . $\vec{r}_B = 2\vec{r}_S - \vec{r}_D$ $\vec{r}_C = 2\vec{r}_S - \vec{r}_A$

9.

☒ Odrediti sve vrednosti realnog parametra a za koje je sistem linearnih jednačina
 $ax + ay = 1$
 $ax + ay = 1$
 1) kontradiktoran: $a = 0$
 2) određen: ☒
 3) 1 puta neodređen: $a \neq 0$
 4) 2 puta neodređen: ☒

10. ☒ Neka je $ABCD$ paralelogram, a tačke P i Q redom sredine duži AD i DC . (BD je dijagonala paralelograma). Izraziti vektor $\overrightarrow{BQ} + \overrightarrow{BP}$ kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{a} = \overrightarrow{AC}$ i $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$.

$$\overrightarrow{BQ} + \overrightarrow{BP} = 3\vec{b} - \frac{3}{2}\vec{a}$$

11. ☒ Izraziti vektor $\vec{x} = (1, 2, 0)$ kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{a} = (1, 2, 1)$, $\vec{b} = (1, 1, -1)$ i $\vec{c} = (1, 1, 0)$:
 $\vec{x} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$

12. ☒ U vektorskom prostoru $(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}, +, \cdot)$, petorka vektora (a, b, c, d, e) je:

1) uvek zavisna 2) nikad generatorna, 3) može ali ne mora da bude generatorna.

13. ☒ U vektorskom prostoru $(\mathbb{C}, \mathbb{R}, +, \cdot)$, vektor $a \neq 0$ je:

1) uvek nezavisan, 2) uvek zavisan, 3) uvek baza.

14. ☒ Koji od vektora su karakteristični vektori za matricu $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$? a) $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

15. ☒ Ako je matrica A' dobijena od matrice $A = [a_{ij}]_{nm}$, $a_{ij} \in \mathbb{R}$ elementarnim transformacijama, tada je:

1) $(\exists \lambda \in \mathbb{R}) |det(A')| = \lambda |det(A)|$ 2) $\text{rang}(A) = \text{rang}(A')$ 3) $det A = 0 \Leftrightarrow det A' = 0$

4) $det A \neq 0 \Leftrightarrow det A' \neq 0$

16. Ako su vektori $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$, $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$ i $\vec{c} = c_1\vec{i} + c_2\vec{j} + c_3\vec{k}$ komplanarni, tada je:

1) $\text{rang} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} = 2$ 2) $\text{rang} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \leq 3$ 3) $\text{rang} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} = 3$

4) $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0$ 5) $\vec{a}(\vec{b} \times \vec{c}) \neq 0$ 6) $(\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}) \vec{a} = \alpha\vec{b} + \beta\vec{c}$

7) $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = 0 \Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 0$ 8) $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ je zavisna.

17. Ako je $\vec{x} = x_1\vec{i} + x_2\vec{j} + x_3\vec{k}$ i $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definisana sa $f(x_1, x_2, x_3) = \vec{m} \cdot \vec{x}$ i $\vec{m} \neq 0$, tada funkcija f uvek jeste: 1) linearna transformacija 2) injektivna 3) surjektivna 4) bijektivna 5) izomorfizam

18. Za svaki izomorfizam $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ i svako $x, y \in \mathbb{R}$ tačno je: 1) $f(x) = ax$ za neko $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ 2) $f(0) = 0$ 3) $x = 0 \Leftarrow f(x) = 0$ 4) $f(xy) = yx$ 5) $f(xy) = yf(x)$ 6) $f(x) = ax$ za neko $a \in \mathbb{R}$ 7) f je surjektivna

19. Neka je $\varphi: V \rightarrow \mathbb{R}^3$ definisana sa $\varphi(x_1\vec{i} + x_2\vec{j} + x_3\vec{k}) = (x_1 - x_2, x_1 - x_3, x_2 - x_3)$, gde su $(V, \mathbb{R}, +, \cdot)$ i $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}, +, \cdot)$ vektorski prostori slobodnih vektora i uređenih trojki. Da li je funkcija $\varphi: V \rightarrow \mathbb{R}^3$ 1) linearna transformacija 2) injektivna 3) surjektivna 4) bijektivna 5) izomorfizam

20. Neka je $\mathcal{M}$ skup svih kvadratnih matrica reda 3 čiji elementi su iz skupa realnih brojeva $\mathbb{R}$. Tada je: 1) $\det: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ 2) $\det: \mathcal{M} \xrightarrow{1-1} \mathbb{R}$ 3) $\det: \mathcal{M} \xrightarrow{na} \mathbb{R}$ 4) $\det: \mathcal{M} \xrightarrow{1-1} \mathbb{R}$ 5) $\det$ je linearna

21. Neka je $\mathcal{M}$ skup svih matrica formata $(3, 1)$ čiji svi elementi su iz skupa realnih brojeva $\mathbb{R}$. Tada je: 1) $\text{rang}: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ 2) $\text{rang}: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{N}$ 3) $\text{rang}: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$ 4) $\text{rang}: \mathcal{M} \rightarrow \{0, 1\}$ 5) $\text{rang}: \mathcal{M} \xrightarrow{na} \{0, 1\}$

22. Neka $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ nije generatorna u prostoru V , $(c_1, c_2, \dots, c_m)$ nezavisna za prostor V i $\dim V = 4$. Tada: 1) $m \leq 4 \leq n$ 2) $n \leq 4 \leq m$ 3) $m \leq 4$ 4) $4 \leq m \leq n$ 5) $4 \leq n \leq m$ 6) $n \geq 4$

23. Neka je $\vec{r}_A$ vektor položaja tačke A , $|\vec{AB}| = 3$ i $|\vec{BC}| = 4$. Odrediti $\vec{r}_C$ u zavisnosti od $\vec{r}_A$, $\vec{a}$ i $\vec{b}$, ako je $\vec{AB} \parallel \vec{a}$, $\vec{BC} \parallel \vec{b}$ i vektori $\vec{AB}$ i $\vec{a}$ su suprotnog smera, a vektori $\vec{BC}$ i $\vec{b}$ istog smera. $\vec{r}_C = \vec{r}_A - 3\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} + 4\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$

24. Neka je k -torka vektora $(b_1, b_2, \dots, b_k)$ nezavisna i $(d_1, d_2, \dots, d_\ell)$ generatorna ℓ -torka vektora. Tada je: 1) $k \leq \ell$ 2) $\ell \leq k$ 3) $k = \ell$ 4) $\ell < k$ 5) $\ell > k$ 6) ništa od prethodnog

25. Koji od sledećih podskupova $U \subseteq \mathbb{R}^3$ je potprostor i za one koji jesu napiši desno od njih njihovu dimenziju:

1) $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = z\}$, $\dim U = 1$

2) $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0\}$, $\dim U = 2$

3) $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 \geq 0\}$, $\dim U = 1$

4) $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 0\}$, $\dim U = 0$

26. Ako je A kvadratna matrica reda 5, tada je: 1) $\det A = 0 \Rightarrow \text{rang } A = 0$ 2) $\det A = 0 \Leftarrow \text{rang } A \leq 4$ 3) $\det A = 0 \Leftarrow \text{rang } A = 4$ 4) $\text{rang } A = 4 \Rightarrow \det A \neq 0$ 5) $\text{rang } A = 4 \Leftarrow \det A \neq 0$ 6) $\text{rang } A = 5 \Leftarrow \exists A^{-1}$

27. Linearne transformacije $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, i $G: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ su uvek oblika:
 $f(x, y) = (x, y, x+y)$ $g(x, y) = x + y$ $h(x) = x$ $F(x, y, z) = (x, y)$ $G(x) = (x, x)$

28. Postoji linearna transformacija $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ za koju važi da je: 1) surjektivna 2) injektivna 3) bijektivna 4) izomorfizam 5) ništa od prethodnog

29. Postoji linearna transformacija $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ za koju važi da je: 1) injektivna 2) surjektivna 3) bijektivna 4) izomorfizam 5) ništa od prethodnog

30. Za svaki vektorski prostor V i svaku surjektivnu linearnu transformaciju $f: V \rightarrow V$ sledi da je transformacija f : 1) injektivna 2) bijektivna 3) izomorfizam 4) ništa od prethodnog

31. Za svaki vektorski prostor V i svaku injektivnu linearnu transformaciju $f: V \rightarrow V$ sledi da je f : 1) surjektivna 2) bijektivna 3) izomorfizam 4) ništa od prethodnog

32. ☒ Za svaki izomorfizam $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ i njegovu matricu A važi: ☒ 1) f je injektivna ☒ 2) postoji A^{-1}
☒ 3) $n = m$ ☒ 4) f je surjektivna ☒ 5) f je bijektivna ☒ 6) A je regularna ☒ 7) $\det A \neq 0$ ☒ 8) ništa od prethodnog
33. ☒ Za svaki vektorski prostor V postoji homogen sistem linearnih jednačina, čiji skup svih rešenja je vektorski prostor izomorfan prostoru V . Zakruži tačan odgovor ☒ DA ☐ NE
34. ☒ Neka su $\vec{x}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ slobodni vektori i $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ jedinični međusobno normalni. Tada je:
☒ 1) $(\vec{x}\vec{i})\vec{i} + (\vec{x}\vec{j})\vec{j} + (\vec{x}\vec{k})\vec{k} = \vec{x}$ ☒ 2) $(\vec{x}\vec{i}, \vec{x}\vec{j}, \vec{x}\vec{k}) \in \mathbb{R}^3$ ☒ 3) $(\vec{x}\vec{i})^2 + (\vec{x}\vec{j})^2 + (\vec{x}\vec{k})^2 = \vec{x}\vec{x}$
☒ 4) $(\vec{x}\vec{i})\vec{i} + (\vec{x}\vec{j})\vec{j} + (\vec{x}\vec{k})\vec{k} \in \mathbb{R}^3$ ☒ 5) $(\vec{x}\vec{i})\vec{i} + (\vec{x}\vec{j})\vec{j} + (\vec{x}\vec{k})\vec{k} = \vec{x}\vec{x}$
35. ☒ Neka su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ vektori iz skupa svih slobodnih vektora V . Tada $(\vec{a} \times \vec{b})(\vec{a} \times \vec{b}) + (\vec{a}\vec{b})(\vec{a}\vec{b}) = (\vec{a}\vec{a})(\vec{b}\vec{b})$ akko je: ☒ 1) $\vec{a}, \vec{b}$ proizvoljni vektori iz V ☒ 2) $\vec{a} = 0 \vee \vec{b} = 0$ ☒ 3) $\vec{a} \parallel \vec{b}$ ☒ 4) $\vec{a} \perp \vec{b}$

KOLOKVIJUM 2, PRIMER 9

1. ☒ Neka tačke $M(3, 0, 3)$, $N(0, 3, 3)$ i $P(3, 3, 0)$ pripadaju ravni α . Napisati bar jedan vektor $\vec{n}$ normalan na α , $\vec{n} = (1, 1, 1)$. Ako je $(A, B, C, D) = (1, 1, 1, -6)$, tada je $Ax + By + Cz + D = 0$ jednačina ravni α . Napisati bar jednu tačku $Q \in \alpha$ i $Q \notin \{M, N, P\}$, $Q(2, 4, 0)$. Težište T trougla MNP je $T(2, 2, 2)$.
2. ☒ Ako je $\vec{a} = (3, -3, 0)$ i $\vec{b} = (-3, 0, 3)$, tada je $|\vec{a}| = \sqrt{18}$ $|\vec{b}| = \sqrt{18}$ $\vec{a}\vec{b} = -9$ $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\sqrt{2}}{3}$ $\vec{a} \times \vec{b} = (-2, -9, -9)$.
3. ☒ Za koje vrednosti parametra $a \in \mathbb{R}$ sistem jednačina $2ax - 2y = 1 \wedge -4x + ay = a$ nad poljem realnih brojeva je:
 1) neodređen: ☒ 2) određen: $a \neq -2 \wedge a \neq 2$ 3) kontradiktoran: $a = -2 \vee a = 2$
4. ☒ $\begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 10 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \end{bmatrix}$ $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 9 \end{vmatrix} = -1$ $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$
5. ☒ Ako je A kvadratna matrica reda 3, tada je: ☒ 1) $\det A = 0 \Rightarrow \text{rang } A = 0$ ☒ 2) $\det A = 0 \Leftarrow \text{rang } A \leq 2$,
☒ 3) $\det A = 0 \Leftarrow \text{rang } A = 2$ ☒ 4) $\text{rang } A = 3 \Rightarrow \det A \neq 0$, ☒ 5) $\text{rang } A = 2 \Leftarrow \det A \neq 0$,
☒ 6) $\text{rang } A = 3 \Leftarrow \exists A^{-1}$.
6. ☒ Linearne transformacije $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, i $G: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ su uvek oblika:
 $f(x, y) = (2x + 3y, x + 2y, x + y)$ $g(x, y) = x + y$ $h(x) = x$ $F(x, y, z) = (x + y, y + z)$ $G(x) = (x, x)$
7. ☒ Za svaki izomorfizam $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ i njegovu matricu A važi: ☒ 1) f je injektivna ☒ 2) postoji A^{-1}
☒ 3) $n = m$ ☒ 4) f je surjektivna ☒ 5) f je bijektivna ☒ 6) A je regularna ☒ 7) $\det A \neq 0$ ☒ 8) ništa od prethodnog
8. ☒ Za svaki vektorski prostor V postoji homogen sistem linearnih jednačina, čiji skup svih rešenja je vektorski prostor izomorfan prostoru V . Zakruži tačan odgovor ☒ DA ☐ NE
9. ☒ Zaokružiti cifre ispred uređenih n -torki koje su GENERATORNE u vektorskom prostoru uređenih trojki $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$: ☒ 1) $((1, 2, 3))$ ☒ 2) $((1, 0, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 1))$ ☒ 3) $((1, 0, 0), (0, 1, 0))$
☒ 4) $((1, 2, 3), (4, 5, 6), (7, 8, 9))$ ☒ 5) $((1, 1, 1), (2, 2, 3), (3, 3, 4))$ ☒ 6) $((0, 0, 2), (0, 0, 0), (3, 0, 0), (0, 7, 0))$
☒ 7) $((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 2, 3))$
10. ☒ Ispod svake matrice napisati broj koji predstavlja njen rang.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

2 2 1 2 0 3 1 1

11. Matrice i rangovi linearnih transformacija $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x) = (2x, 3x)$ i $g, h, r, s, p: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $g(x, y, z) = (x + y, y + y + y)$, $h(x, y, z) = (2x, 3x)$, $r(x, y, z) = (z, y)$, $s(x, y, z) = (x + y + z, x + y + z)$ i $p(x, y, z) = (0, 0 + 0)$ su: (Rang upisati ispod odgovarajuće matrice)

$$M_f = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad M_g = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad M_h = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad M_r = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad M_s = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad M_p = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

12. Neka je $ABCD$ paralelogram, gde mu je BD dijagonala, a S sredina od CD . U zavisnosti od $\vec{r}_A, \vec{r}_D$ i $\vec{r}_S$ napisati vektore položaja tačaka B i C . $\vec{r}_B = \vec{r}_A + 2\vec{r}_S - \vec{r}_D$ $\vec{r}_C = 2\vec{r}_S - \vec{r}_D$

13. Projekcija vektora $\vec{x}$ na pravac vektora $\vec{n}$ je $\vec{x}' = \vec{n} \frac{\vec{x} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|^2}$ a na ravan $\alpha: \vec{n}\vec{r} = \vec{n}\vec{r}_Q$ je $\vec{x}'' = \vec{x} - \vec{x}'$

14. Napisati vektore položaja bar dve tačke M i N u zavisnosti od $\vec{n}, \vec{r}_Q$ i d , koje su sa različitih strana ravni $\alpha: \vec{n}\vec{r} = \vec{n}\vec{r}_Q$ i od nje udaljene za d . $\vec{r}_M = \vec{r}_Q + d \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$ $\vec{r}_N = \vec{r}_Q - d \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$

15. Neka je tačka P presk ravni $\alpha: \vec{n}\vec{r} = \vec{n}\vec{r}_Q$ i prave $a: \vec{r} = \vec{r}_A + t\vec{a}$ i $\vec{n}\vec{a} \neq 0$. Tada je: 1) $\vec{r}_P = \vec{r}_Q + \frac{(\vec{r}_A - \vec{r}_Q)\vec{n}}{\vec{n}\vec{a}} \vec{a}$
2) $\vec{r}_P = \vec{r}_A + \frac{(\vec{r}_Q - \vec{r}_A)\vec{n}}{\vec{n}\vec{a}} \vec{a}$ 3) $\vec{r}_P = \vec{r}_A - \frac{(\vec{r}_A - \vec{r}_Q)\vec{n}}{\vec{n}\vec{a}} \vec{a}$ 4) $\vec{r}_P = \vec{r}_A - \frac{(\vec{r}_A - \vec{r}_Q)\vec{n}}{\vec{n}\vec{a}} \vec{a}$ 5) $\vec{r}_P = \vec{r}_A + \frac{(\vec{r}_Q - \vec{r}_A)\vec{n}}{\vec{n}\vec{a}} \vec{a}$

16. Neka su a, b i c zavisni vektori. Tada uređena trojka vektora $(2a - 3b + c, 3b - c, a - 5b + c)$ je:
1) uvek zavisna 2) uvek nezavisna 3) zavisna ili nezavisna, tj. zavisi od izbora vektora a, b, c .

17. Neka su a, b i c nezavisni vektori. Tada uređena trojka vektora $(a + b - c, a + b, -c)$ je:
1) uvek zavisna 2) uvek nezavisna 3) zavisna ili nezavisna, tj. zavisi od izbora vektora a, b, c

18. Za prave $m: \frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{5}$ i $n: \frac{x-5}{-6} = \frac{y}{4} = \frac{z-5}{-10}$ važi:
a) mimoilazne su ($m \cap n = \emptyset \wedge m \nparallel n$)
b) paralelne su i različite ($m \parallel n \wedge m \neq n$) c) poklapaju se ($m = n$) d) seku se ($m \cap n = \{M\}$)

19. Za proizvoljne vektore $\vec{n}$ i $\vec{r}$ važi:
1) $\vec{n}\vec{r} = |\vec{n}||\vec{r}| \Leftrightarrow \vec{n} \times \vec{r} = 0$ 2) $\vec{n}\vec{r} = |\vec{n}||\vec{r}| \Rightarrow \vec{n} \times \vec{r} = 0$
3) $\vec{n}\vec{r} = |\vec{n}||\vec{r}| \Leftarrow \vec{n} \times \vec{r} = 0$ 4) $\vec{n}\vec{r} \neq |\vec{n}||\vec{r}| \Rightarrow \vec{n} \times \vec{r} \neq 0$ 5) $\vec{n}\vec{r} \neq |\vec{n}||\vec{r}| \Leftarrow \vec{n} \times \vec{r} \neq 0$

20. Odrediti sve vrednosti realnog parametra a za koje je sistem linearnih jednačina
 $ax + ay = 1$
 $ax - ay = 1$
1) kontradiktoran: $a = 0$
2) određen: $a \neq 0$
3) 1 puta neodređen: $\frac{1}{2}$
4) 2 puta neodređen: $\frac{1}{2}$

21. Neka je $ABCD$ paralelogram, a tačke P i Q redom sredine duži AD i DC . (BD je dijagonala paralelograma). Izraziti vektor $\vec{BQ} + \vec{BP}$ kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{a} = \vec{BD}$ i $\vec{b} = \vec{AB}$.
 $\vec{BQ} + \vec{BP} =$

22. Izraziti vektor $\vec{x} = (1, 2, 2)$ kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{a} = (1, 2, 1)$, $\vec{b} = (1, 1, -1)$ i $\vec{c} = (1, 1, 0)$:
 $\vec{x} = \frac{1}{2}\vec{a}$

23. U vektorskom prostoru $(\mathbb{R}^6, \mathbb{R}, +, \cdot)$, petorka vektora (a, b, c, d, e) je:
1) uvek nezavisna 2) nikad generatorna, 3) nekada zavisna, a nekada nezavisna.

24. U vektorskom prostoru $(\mathbb{C}, \mathbb{R}, +, \cdot)$, vektor $a \neq 0$ je:
1) uvek nezavisan, 2) uvek zavisan, 3) uvek baza.

25. Koji od vektora su karakteristični vektori za matricu $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$? 1) $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ 2) $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ 3) $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$

26. Ako je matrica A' dobijena od matrice $A = [a_{ij}]_{nm}$, $a_{ij} \in \mathbb{R}$ elementarnim transformacijama, tada je:
1) $(\exists \lambda \in \mathbb{R}) |det(A')| = \lambda |det(A)|$ 2) $\text{rang}(A) = \text{rang}(A')$ 3) $\det A = 0 \Leftrightarrow \det A' = 0$
4) $\det A \neq 0 \Leftrightarrow \det A' \neq 0$

27. Vektori $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$, $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$ i $\vec{c} = c_1\vec{i} + c_2\vec{j} + c_3\vec{k}$ su nekomplanarni akko:

$$1) \text{rang} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} = 2 \quad 2) \text{rang} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \leq 3 \quad 3) \text{rang} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} = 3$$

$$4) \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0 \quad 5) \vec{a}(\vec{b} \times \vec{c}) \neq 0$$

$$6) (\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}) \vec{a} = \alpha\vec{b} + \beta\vec{c} \quad 7) \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = 0 \Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 0 \quad 8) (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) \text{ je zavisna.}$$

- 7.6. $\odot$ Ako je $\vec{x} = x_1\vec{i} + x_2\vec{j} + x_3\vec{k}$ i $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definisana sa $f(x_1, x_2, x_3) = \vec{m} \cdot \vec{x}$, tada funkcija f uvek jeste:
 (1) linearna transformacija (2) injektivna (3) surjektivna (4) bijektivna (5) izomorfizam
- 7.7. $\odot$ Za svaki izomorfizam $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ i svako $x, y \in \mathbb{R}$ tačno je: (1) $f(x, y) = (ax + by, cx + dy)$ za neke $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ (2) $f(0) = 0$ (3) $(x, y) = 0 \Leftrightarrow f(x, y) = 0$ (4) $f(x, y) = 0 \Leftrightarrow (x, y) = 0$ (5) f je injektivna (6) f je surjektivna
- 7.8. $\odot$ Neka je $\varphi: V \rightarrow \mathbb{R}^3$ definisana sa $\varphi(x_1\vec{i} + x_2\vec{j} + x_3\vec{k}) = (x_1, x_1 + x_2, x_1 + x_2 + x_3)$, gde su $(V, \mathbb{R}, +, \cdot)$ i $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}, +, \cdot)$ vektorski prostori slobodnih vektora i uređenih trojki. Da li je funkcija $\varphi: V \rightarrow \mathbb{R}^3$
 (1) linearna transformacija (2) injektivna (3) surjektivna (4) bijektivna (5) izomorfizam
- 7.9. $\odot$ Neka je $\mathcal{M}$ skup svih kvadratnih matrica reda 1 čiji elementi su iz skupa realnih brojeva $\mathbb{R}$. Tada je:
 (1) $\det: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ (2) $\det: \mathcal{M} \xrightarrow{1-1} \mathbb{R}$ (3) $\det: \mathcal{M} \xrightarrow{na} \mathbb{R}$ (4) $\det: \mathcal{M} \xrightarrow{1-1} \mathbb{R}$ (5) $\det$ je linearna
- 7.10. $\odot$ Neka je $\mathcal{M}$ skup svih matrica formata $(3, 2)$ čiji svi elementi su iz skupa realnih brojeva $\mathbb{R}$. Tada je:
 (1) $\text{rang}: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ (2) $\text{rang}: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{N}$ (3) $\text{rang}: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$ (4) $\text{rang}: \mathcal{M} \rightarrow \{0, 1\}$ (5) $\text{rang}: \mathcal{M} \xrightarrow{na} \{0, 1, 2\}$
- 7.11. $\odot$ Neka je $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ generatorna u prostoru V , $(c_1, c_2, \dots, c_m)$ nezavisna za prostor V i $\dim V = 4$. Tada: (1) $m \leq 4 \leq n$ (2) $n \leq 4 \leq m$ (3) $m \leq 4$ (4) $4 \leq m \leq n$ (5) $4 \leq n \leq m$ (6) $n \geq 4$
- 7.12. $\odot$ Neka je $\vec{r}_A$ vektor položaja tačke A , $|\vec{AB}| = |\vec{BC}| = 1$. Odrediti $\vec{r}_C$ u zavisnosti od $\vec{r}_A$, $\vec{a}$ i $\vec{b}$, ako je $\vec{AB} \parallel \vec{a}$, $\vec{BC} \parallel \vec{b}$ i vektori $\vec{AB}$ i $\vec{a}$ su istog smera, a vektori $\vec{BC}$ i $\vec{b}$ suprotnog smera. $\vec{r}_C = \vec{r}_A + \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} - \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$
- 7.13. $\odot$ Neka je k -torka vektora $(b_1, b_2, \dots, b_k)$ nezavisna i $(d_1, d_2, \dots, d_\ell)$ baza. Tada je:
 (1) $k \leq \ell$ (2) $\ell \leq k$ (3) $k = \ell$ (4) $\ell < k$ (5) $\ell > k$ (6) ništa od prethodnog
- 7.14. $\odot$ Koji od sledećih podskupova $U \subseteq \mathbb{R}^3$ je potprostor i za one koji jesu napiši desno od njih njihovu dimenziju:
 (1) $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = z\}$, $\dim U = 2$
 (2) $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0\}$, $\dim U = 2$
 (3) $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 0\}$, $\dim U = 1$
 (4) $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \geq 0\}$, $\dim U = 3$

KOLOKVIJUM 2, PRIMER 10

7. $\odot$ Neka tačke $M(1, -1, 2)$, $N(-1, 1, 2)$ i $P(1, 1, 0)$ pripadaju ravni α . Napisati bar jedan vektor $\vec{n}$ normalan na α , $\vec{n} = (1, 1, 1)$. Ako je $(A, B, C, D) = (1, 1, 1, -2)$, tada je $Ax + By + Cz + D = 0$ jednačina ravni α . Napisati koordinate tačke Q koja pripada ravni α i x osi. $Q(2, 0, 0)$.
- 7.2. $\odot$ Ako je $\vec{a} = (2, -2, 0)$ i $\vec{b} = (-2, 0, 2)$, tada je $|\vec{a}| = \sqrt{8}$, $|\vec{b}| = \sqrt{8}$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = -4$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{2\pi}{3}$, $\vec{a} \times \vec{b} = (-4, -4, -4)$
- 7.3. $\odot$ Za koje vrednosti parametra $a \in \mathbb{R}$ sistem jednačina $ax - y = 1 \wedge x + ay = a$ nad poljem realnih brojeva je: 1) neodređen: / 2) određen: $x \in \mathbb{R}$ 3) kontradiktoran: /
- 7.4. $\odot$ $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 \\ -6 \end{bmatrix}$ $\begin{vmatrix} 5 & 7 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -6$ $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$
- 7.5. $\odot$ Koje su od sledećih uređenih n -torki zavisne za vektorskog prostora $\mathbb{R}^3$: 1) $((0, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 0))$ 2) $((1, 0, 0), (0, -1, 0))$ 3) $((0, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 0), (1, 2, 3))$ 4) $((1, 1, 1), (2, 2, 2), (3, 3, 3))$
- 7.6. $\odot$ Matrice linearnih transformacija $h(x) = 5x$, $f(x, y) = x + 2y$, $g(x, y, z) = (x, x - y)$ i $s(x, y) = (3x, y)$ su:
 $M_h = [5]$ $M_f = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$ $M_g = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ $M_s = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
- 7.7. $\odot$ Ispod svake matrice napisati broj koji predstavlja njen rang.
 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ 3 $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 2 $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ 2 $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -4 & 2 & -2 \end{bmatrix}$ 1 $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ 0 $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ 3 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 1 $[2]$ 1 $\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$ 1

8. Neka je je $ABCD$ paralelogram, gde mu je BD dijagonala, a S sredina od BC . U zavisnosti od $\vec{r}_A, \vec{r}_D$ i $\vec{r}_S$ napisati vektore položaja tačaka B i C . $\vec{r}_B = 2\vec{r}_S - \vec{r}_D$ $\vec{r}_C = 2\vec{r}_S - \vec{r}_A$

9. Izraziti vektor $\vec{x} = (1, 2, 2)$ kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{a} = (1, 2, 1)$, $\vec{b} = (1, 1, -1)$ i $\vec{c} = (1, 1, 0)$:
 $\vec{x} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$
10. U vektorskom prostoru $(\mathbb{R}^6, \mathbb{R}, +, \cdot)$, petorka vektora (a, b, c, d, e) je:
~~1) uvek nezavisna~~ **2) nikad generatorna,** **3) nekada zavisna, a nekada nezavisna.**
11. U vektorskom prostoru $(\mathbb{C}, \mathbb{R}, +, \cdot)$, vektor $a \neq 0$ je:
1) uvek nezavisna, ~~2) uvek zavisna,~~ ~~3) uvek baza.~~
12. Neka su $a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$, $n = \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ matrice kolone nad poljem $\mathbb{R}$. Tada je:
1) $a^T n = 0 \Rightarrow a \perp n$ ~~2) $na = an$~~ **3) $n^T a = a^T n$** ~~4) $(n^T x)a = (an^T)x$~~ ~~5) $(n^T a)x = (xn^T)a$~~
~~6) $(n^T x)a = n^T(xa)$~~
13. Linearne transformacije f i g definisane su sa $f(x_1, x_2) = (x_1 - x_2, 2x_1 + x_2)$ i $g(x_1, x_2) = (x_1 - x_2, x_1 + x_2)$.
a) Po definiciji kompozicije o odrediti $(f \circ g)(x_1, x_2) = f(g(x_1, x_2)) = (-x_1 + 2x_2, 2x_1 - x_2)$
b) Napisati matrice M_f i M_g koje odgovaraju linearnim transformacijama f i g
 $M_f = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $M_g = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.
c) Izračunati proizvod matrica $M_f \cdot M_g = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$, $M_g^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ i $g^{-1}(x_1, x_2) = (-x_1 + 2x_2, -x_1)$
d) Napisati linearnu transformaciju $h(x_1, x_2)$ kojoj odgovara matrica $M_f \cdot M_g$ tj. $h(x_1, x_2) = (-x_1 + 2x_2, 3x_1 - x_2)$
e) Da li je $h = f \circ g$ tj. da li je $(\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}) h(x_1, x_2) = (f \circ g)(x_1, x_2)$? **DA** NE
14. Odrediti vrednosti parametara $a, b \in \mathbb{R}$ za koje je sistem $\begin{cases} x + by = 1 \\ bx - ay = b \end{cases}$
(a) kontradiktoran:
(b) određen: $a \neq -b^2$
(c) 1 puta neodređen: $a = -b^2$
(d) 2 puta neodređen:
15. Ako su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ različiti nekolinearni vektori, tada je neorijentisani, konveksni ugao između vektora $\vec{m} = \vec{a}\vec{b} - \vec{b}\vec{a}$ i $\vec{n} = \frac{\vec{a}}{a} + \frac{\vec{b}}{b}$: **1) 0** ~~2) $\frac{\pi}{6}$~~ ~~3) $\frac{\pi}{4}$~~ ~~4) $\frac{\pi}{3}$~~ **5) $\frac{\pi}{2}$** ~~6) π~~
16. Izračunati vektore položaja $\vec{r}_T$ i $\vec{r}_{T''}$ projekcija tačke $T(-1, 1, -1)$ na pravu $a: \vec{r} = (-1, 0, -2) + t(1, -1, 1)$, $t \in \mathbb{R}$ i ravan $\alpha: (1, -1, 0) \cdot \vec{r} = (1, -1, 0) \cdot (1, 0, 0)$.
 $\vec{r}_T = (-1, 0, -2)$ $\vec{r}_{T''} = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -1)$
17. Izračunati α i β ako je $\alpha(1, -3, 2) + \beta(3, 7, -3) = (0, 0, 0)$: $(\alpha, \beta) \in \{ (0, 0) \}$
18. Izračunati α i β ako je $\alpha(1, -3, 2) + \beta(2, -6, 4) = (0, 0, 0)$: $(\alpha, \beta) \in \{ (-2\lambda, \lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R} \}$
19. Neka je $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ uređena trojka nekoplanarnih slobodnih vektora. Tada: **1) trojka $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ je uvek linearno nezavisna** ~~2) trojka $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ je uvek linearno zavisna~~ ~~3) postoji takav vektor $\vec{d}$ da je četvorka $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d})$ nezavisna~~ ~~4) postoji takav vektor $\vec{d}$ da je četvorka $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d})$ zavisna~~ ~~5) za svaki vektor $\vec{d}$ je četvorka $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d})$ nezavisna~~ ~~6) za svaki vektor $\vec{d}$ je četvorka $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d})$ zavisna~~ **7) svaki vektor $\vec{d}$ je linearna kombinacija uređene trojke vektora $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$**
20. Neka su $\mathbf{a}_1 = (a_{11}, \dots, a_{1n})$, $\mathbf{a}_2 = (a_{21}, \dots, a_{2n})$, ..., $\mathbf{a}_n = (a_{n1}, \dots, a_{nn})$ vektori vrste matrice $A = A_{nn} = [a_{ij}]_{nn}$ i neka je $V = \text{Lin}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n) = \{ \alpha_1 \mathbf{a}_1 + \alpha_2 \mathbf{a}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{a}_n \mid \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \}$. Tada
~~1) $\det A \neq 0 \Leftrightarrow \text{rang } A < n$~~ ~~2) $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n)$ je zavisna akko $\det A = 0$~~ **3) $\dim V \neq 0 \Leftrightarrow \text{rang } A \geq 1$**
~~4) $\det A \neq 0 \Leftrightarrow \dim V < n$~~ ~~5) $\det A \neq 0 \Leftrightarrow \text{rang } A \leq n$~~ **6) $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n)$ je zavisna akko $\text{rang } A < n$**
21. U vektorskom prostoru svih slobodnih vektora, uređen par vektora (a, b) je:
~~1) uvek nezavisna,~~ ~~2) uvek zavisna,~~ ~~3) nekad nezavisna a nekad zavisna,~~ **4) uvek generatoran.**

22. Ako je uređena trojka vektora (a, b, c) zavisna, tada je uređena trojka vektora $(a+b, a+c, a+2b-c)$
~~a) uvek nezavisna~~ **b) uvek zavisna** ~~c) nekada zavisna, a nekada nezavisna.~~
23. Neka je $ABCD$ paralelogram, a tačka T težište trougla BCD (BD je dijagonala paralelograma). Izraziti vektor $\overrightarrow{DT}$ kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ i $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$. $\overrightarrow{DT} = \frac{2}{3}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b}$
24. Neka je u sedmodimenzionalnom vektorskom prostoru V , k -torka vektora $(a_1, \dots, a_k)$ generatorna. Tada je uvek: ~~1) $k < 7$~~ ~~2) $k \leq 7$~~ ~~3) $k = 7$~~ ~~4) $k > 7$~~ **5) $k \geq 7$** ~~6) ništa od prethodnog~~
25. Ako je $f: V \rightarrow W$ izomorfizam, tada je: **1) postoji f^{-1}** **2) V i W su izomorfni** **3) $V = W$**
4) za svaku nezavisnu n -torku vektora $(v_1, \dots, v_n)$ iz V , n -torka $(f(v_1), \dots, f(v_n))$ je nezavisna u W
5) za svaku zavisnu n -torku vektora $(v_1, \dots, v_n)$ iz V , n -torka $(f(v_1), \dots, f(v_n))$ je zavisna u W
- Potreban i dovoljan uslov da ravan α bude potprostor vektorskog prostora $\mathbb{R}^3$ je: da sadrži tačku i vektor $(\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}) (\forall (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \in \alpha) (\lambda(x_1, y_1, z_1) + \mu(x_2, y_2, z_2)) \in \alpha$ i tada je α potprostor dimenzije: 2
26. Za proizvoljne kvadratne regularne matrice A, B, C reda 2 važi:
1) $A(BC) = (AB)C$ ~~2) $AB = BA$~~ **3) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$** ~~4) $\det(AB) = \det(A) + \det(B)$~~
5) $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ ~~6) $(AB)^2 = A^2B^2$~~ ~~7) $\det(A+B) = \det(A) + \det(B)$~~
27. Zaokružiti brojeve ispred podskupova $U_i \subseteq \mathbb{R}^3$ koji su podprostori i za one koji jesu napisati njihove dimenzije.
~~1) $U_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y \vee x = -y\}$~~ **2) $U_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = -y\}$**
3) $U_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^3 = -y^3\}$ ~~4) $U_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = 0\}$~~
~~5) $U_5 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^3 \mid xy = 0\}$~~ **6) $U_6 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 0\}$**
 $\dim U_1 = \text{ne}$ $\dim U_2 = 2$ $\dim U_3 = 2$ $\dim U_4 = 1$ $\dim U_5 = \text{ne}$ $\dim U_6 = 0$
28. Neka je $a = (2, 2, 0)$, $b = (-3, 3, 0)$, $c = (1, -1, 0)$, $d = (-1, 1, 0)$, $e = (0, 0, 1)$, $f = (1, 0, 0)$, $g = (1, 2, 0)$.
1) $V = L(b, c, d) \Rightarrow \dim(V) = 1$ **2) $V = L(a, f, g) \Rightarrow \dim(V) = 2$** **3) $V = L(a) \Rightarrow \dim(V) = 1$**
4) $V = L(0, 0, 0) \Rightarrow \dim(V) = 0$ **5) $V = L(a, b) \Rightarrow \dim(V) = 2$** **6) $V = L(e, f, g) \Rightarrow \dim(V) = 3$**
7) $V = L(b, c, e) \Rightarrow \dim(V) = 2$ **8) $V = L(a, b, c) \Rightarrow \dim(V) = 2$** **9) $V = L(a, g) \Rightarrow \dim(V) = 2$**
29. Vektori $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ i $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$ su nekolinearni akko je: **1) $\vec{a} \times \vec{b} \neq 0$** ~~2) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$~~
~~3) $\text{rang} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} = 1$~~ ~~4) $\text{rang} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} \leq 2$~~ **5) $\text{rang} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} = 2$** ~~6) $\vec{a}$ i $\vec{b}$ su zavisni~~
~~7) $(\exists \lambda \in \mathbb{R}) \vec{a} \neq \lambda \vec{b}$~~ ~~8) $\vec{a} \parallel \vec{b}$~~ **9) $(\forall \lambda \in \mathbb{R}) (\vec{a} \neq \lambda \vec{b} \wedge \lambda \vec{a} \neq \vec{b})$** ~~10) $\alpha \vec{a} + \beta \vec{b} = 0 \wedge \alpha^2 + \beta^2 = 0$~~

KOLOKVIJUM 2, PRIMER 11

1. Neka tačke $M(1, 0, 0)$, $N(-1, 1, 1)$ i $P(0, -1, -1)$ pripadaju ravni α .
 $\overrightarrow{MP} = (-1, -1, -1)$ $\overrightarrow{MN} = (-2, 1, 1)$. Napisati bar jedan vektor $\vec{n}$ normalan na α , $\vec{n} = (0, 1, -1)$.
Ako je $(A, B, C, D) = (0, 1, -1, 0)$, tada je $Ax + By + Cz + D = 0$ jednačina ravni α . Napisati bar jednu tačku $S \in \alpha$ i $S \notin \{M, N, P\}$, $S(1, 2, 2)$.
2. Sistem linearnih jednačina
$$\begin{matrix} x + y + z = 1 \\ y + z = 1 \end{matrix}$$
 je
1) kontradiktoran, **2) određen**, **3) 1 puta neodređen**, ~~4) 2 puta neodređen.~~
3. Neka je p prava čija je jednačina $x - 1 = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{2}$. Napisati jedan vektor pravca pravce p :
 $\vec{p} = (1, 2, -2)$, i koordinate jedne tačke pravce p : $(1, -1, 0)$.
4. Matrica linearne transformacije $f(x, y, z) = (x + y - 2z, x - z)$ je: $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$
5. $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 3 \\ 13 & -6 & 8 \end{bmatrix}$ $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -1$ $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

6. ☒ Ispod svake matrice napisati broj koji predstavlja njen rang.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} [4 \ 3 \ 2 \ 1] \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

7. ☒ Ako je $\vec{a} = (1, -1, 0)$ i $\vec{b} = (1, 1, -1)$, tada je $|\vec{a}| = \sqrt{2}$ $|\vec{b}| = \sqrt{3}$ $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$
 $\vec{a} \times \vec{b} = (1, 1, 2)$ $|\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{6}$ $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{2}$

8. ☒ Proizvoljna linearna transformacija $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ je oblika $f(x, y) = (x + y, x + y, x + y)$

9. ☒ Neka je S presek dijagonala paralelograma $ABCD$. Zaokružiti slovo (slova) ispred tačnih jednakosti:

☒ a) $\vec{r}_S = \frac{1}{2}\vec{r}_A + 0 \cdot \vec{r}_B + \frac{1}{2}\vec{r}_C + 0 \cdot \vec{r}_D$ ☐ b) $\vec{r}_S = 0 \cdot \vec{r}_A + \frac{1}{2}\vec{r}_B + 0 \cdot \vec{r}_C + \frac{1}{2}\vec{r}_D$ ☐ c) $\vec{r}_S = \frac{1}{4}\vec{r}_A + \frac{1}{4}\vec{r}_B + \frac{1}{4}\vec{r}_C + \frac{1}{4}\vec{r}_D$

10. ☒ Za koje vrednosti parametra $a \in \mathbb{R}$ je sistem linearnih jednačina $x + y + z = 0 \wedge ax + ay + az = 1$ nad poljem realnih brojeva

a) neodređen: ☒ b) određen: ☒ c) kontradiktoran: ☐ $a \in \mathbb{R}$

11. ☒ Broj rešenja homogenog sistema linearnih jednačina nad poljem realnih brojeva može da bude:

☒ a) 0 ☒ b) 1 ☒ c) 2 ☒ d) ∞

12. ☒ Funkcija $f: V \rightarrow W$ između vektorskih prostora V i W nad poljem F je linearna ako

☒ a) $f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$ ☒ b) f zadovoljava osam aksioma vektorskog prostora.
☒ c) $f: V \rightarrow W$ je bijektivna funkcija.

13. ☒ Ako je $f: V \rightarrow W$ linearna transformacija, koje od sledećih tvrđenja je tačno?

☒ a) $f(0) = 0$. ☒ b) $f(-x) = -x$ za svako $x \in V$. ☒ c) $f(\lambda v) = f(\lambda) + f(v)$ za svako $\lambda \in F, v \in V$.

14. ☒ Linearna transformacija $f: V \rightarrow W$ je izomorfizam ako

☒ a) $(\forall x \in V)(\forall y \in V) f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$ i $(\forall z \in W)(\exists v \in V) f(v) = z$ ☒ b) V i W su izomorfni.
☒ c) za svaku n -torku vektora $(v_1, \dots, v_n)$ iz V , n -torka vektora $(f(v_1), \dots, f(v_n))$ je baza od W .

15. ☒ Izračunati vektore položaja $\vec{r}_{T'}$ i $\vec{r}_{T''}$ projekcija tačke $T(-1, 1, -1)$ na pravu

$a: (A(-1, 0, -2), \vec{a} = (1, -1, 1))$ i ravan $\alpha: x - y = 1$.

$\vec{r}_{T'} = (-1, 0, 2)$ $\vec{r}_{T''} = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -1)$

16. ☒ Koje od tvrđenja je tačno za bilo koje kvadratne matrice A, B, C reda 4:

☒ a) $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$ ☒ b) $\det(AB) = \det(BA)$ ☒ c) $\det(AB) = \det(BA) \Rightarrow AB = BA$
☒ d) $\det(A) = \det(A^T)$

17. ☒ Napisati analitičke izraze za funkcije $f, g, h, s, t, u, v: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, čije su geometrijske interpretacije redom:

Oсна simetrija u odnosu na x -osu: $f(x, y) = (x, -y)$

Oсна simetrija u odnosu na y -osu: $g(x, y) = (-x, y)$

Oсна simetrija u odnosu na pravu $y = -x$: $h(x, y) = (-y, -x)$

Oсна simetrija u odnosu na $y = x$: $s(x, y) = (y, x)$

Centralna simetrija u odnosu na koordinatni početak: $t(x, y) = (-x, -y)$

1. 2. Rotacija za 90° oko koordinatnog početka: $u(x, y) = (-y, x)$ $v(x, y) = (y, -x)$

Projekcija na x -osu: $v(x, y) = (x, 0)$

Od navedenih funkcija linearne transformacije su: g, v, e

, izomorfizmi su: f, g, h, s, t, u

18. ☒ Vektori $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ i $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$ su kolinearni akko: ☒ 1) $\vec{a} \times \vec{b} = 0$ ☒ 2) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

☒ 3) $\text{rang} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} = 1$ ☒ 4) $\text{rang} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} \leq 2$ ☒ 5) $\text{rang} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} \leq 1$ ☒ 6) $\vec{a}$ i $\vec{b}$ su zavisni

☒ 7) $(\exists \lambda \in \mathbb{R}) \vec{a} = \lambda \vec{b}$ ☒ 8) $\vec{a} \parallel \vec{b}$ ☒ 9) $(\exists \lambda \in \mathbb{R})(\vec{a} = \lambda \vec{b} \vee \lambda \vec{a} = \vec{b})$ ☒ 10) $(\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}) \alpha \vec{a} + \beta \vec{b} = 0 \wedge \alpha^2 + \beta^2 \neq 0$

19. Vektori $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$, $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$ i $\vec{c} = c_1\vec{i} + c_2\vec{j} + c_3\vec{k}$ su komplanarni akko:

1) $\text{rang} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} = 2$ 2) $\text{rang} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \leq 3$ 3) $\text{rang} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} = 3$

4) $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$ 5) $\vec{a}(\vec{b} \times \vec{c}) = 0$ 6) $(\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}) \vec{a} = \alpha\vec{b} + \beta\vec{c}$

7) $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = 0 \wedge \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 0$ 8) $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ je zavisna.

20. Neka je $ABCD$ kvadrat, M sredina dijagonale AC , a N težište trougla ABC , napisati $\overrightarrow{MN}$ kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ i $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$. $\overrightarrow{MN} = \frac{\vec{a} - \vec{b}}{6}$

21. Koje od tvrđenja je tačno ako je A kvadratna matrica reda n : a) $\text{Rang}(A) = 0 \Rightarrow \det(A) = 0$ b) $\det(A) = 0 \Leftrightarrow \text{Rang}(A) \leq n - 1$ c) $\text{Rang}(A) = n \Rightarrow \det(A) \neq 0$ d) $\text{Rang}(A) = n \Rightarrow \det(A) = 0$.

22. Napisati vektor položaja $\vec{r}_B$ tačke B koja je simetrična tački A u odnosu na tačku T :

$\vec{r}_B = f(\vec{r}_A, \vec{r}_T) = 2\vec{r}_T - \vec{r}_A$

23. (m + 1) - torka vektora u m - dimenzionalnom vektorskom prostoru je: a) uvek linearno nezavisna, b) uvek linearno zavisna, c) nekad linearno nezavisna, a nekad linearno zavisna.

24. m - torka vektora u m - dimenzionalnom vektorskom prostoru je: a) uvek linearno nezavisna, b) uvek linearno zavisna, c) nekad linearno nezavisna, a nekad linearno zavisna.

25. (m - 1) - torka vektora u m - dimenzionalnom vektorskom prostoru je: a) uvek linearno nezavisna, b) uvek linearno zavisna, c) nekad linearno nezavisna, a nekad linearno zavisna.

26. U vektorskom prostoru $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$, linearno nezavisna trojka (a, b, c) je: a) uvek baza, b) uvek generatorna, c) nikad generatorna, d) nikad baza.

27. U vektorskom prostoru $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$, generatorna trojka (a, b, c) je: a) uvek baza, b) uvek linearno nezavisna, c) nikad linearno nezavisna, d) nikad baza.

28. Za koje vrednosti parametara a, b su navedene funkcije linearne transformacije, i za one koje jesu, naći odgovarajuću matricu i diskutovati njen rang:

$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = (x + y + z + a)^b$ $a=0 \wedge b=1$ $M_f = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ $\text{rang}(M_f) = 1$

$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $g(x) = (\frac{a}{x}, ax + b)$ $a=0 \wedge b=0$ $M_g = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\text{rang}(M_g) = 0$

29. Postoji linearna transformacija $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ za koju važi da je: 1) surjektivna 2) injektivna 3) bijektivna 4) izomorfizam 5) ništa od prethodnog

30. Postoji linearna transformacija $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ za koju važi da je: 1) injektivna 2) surjektivna 3) bijektivna 4) izomorfizam 5) ništa od prethodnog.

31. Za svaki vektorski prostor V i svaku surjektivnu linearnu transformaciju $f: V \rightarrow V$ sledi da je transformacija f : 1) injektivna 2) bijektivna 3) izomorfizam 4) ništa od prethodnog.

32. Za svaki vektorski prostor V i svaku injektivnu linearnu transformaciju $f: V \rightarrow V$ sledi da je transformacija f : 1) surjektivna 2) bijektivna 3) izomorfizam 4) ništa od prethodnog

KOLOKVIJUM 2, PRIMER 12

1. Neka tačke $M(2, 0, 0)$, $N(0, 2, 0)$ i $P(1, 1, 1)$ pripadaju ravni α . $\overrightarrow{MP} = (-1, 1, 1)$ $\overrightarrow{MN} = (-2, 2, 0)$. Napisati bar jedan vektor $\vec{n}$ normalan na α , $\vec{n} = (-1, -1, 0)$. Ako je $(A, B, C, D) = (1, 1, 0, -2)$, tada je $Ax + By + Cz + D = 0$ jednačina ravni α . Napisati bar jednu tačku $S \in \alpha$ i $S \notin \{M, N, P\}$, $S(1, 1, 1)$.

3. ☒ Sistem linearnih jednačina $\begin{matrix} x + y + z = 1 \\ 2x + 2y + 2z = 2 \end{matrix}$ je
~~1)~~ kontradiktoran, ~~2)~~ određen, ~~3)~~ 1 puta neodređen, ☒ 2 puta neodređen.
4. ☒ Neka je p prava čija je jednačina $x + 5 = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{-2}$. Napisati jedan vektor pravca prave p :
 $\vec{p} = (1, 2, -2)$, i koordinate jedne tačke prave p : $(-5, 1, 0)$.
4. ☒ Za koje vrednosti parametra $a \in \mathbb{R}$ sistem jednačina $ax + y = 1 \wedge x + ay = a$ nad poljem realnih brojeva je: 1) neodređen: $a = 1 \vee a = -1$ 2) određen: $a \neq 1 \wedge a \neq -1$ 3) kontradiktoran: /
5. ☒ $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot [1 \ -1 \ 0] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} [1 \ -1 \ 0] \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 7 & -6 \\ 8 & -7 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & -6 \\ 8 & -7 \end{bmatrix}$
6. ☒ Zaokružiti cifru (cifre) ispred uređenih n -torki koje su GENERATORNE u vektorskom prostoru trojki $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$: ~~1)~~ $((0, 1, 0))$ ☒ $((1, 2, 0), (1, 1, 0), (2, -1, 1))$ ~~3)~~ $((1, 0, 0), (2, 0, 2))$
☒ $((1, 0, 0), (0, 2, 0), (0, 0, 3))$ ~~5)~~ $((1, 1, 1), (2, 2, 2))$ ~~6)~~ $((0, 0, 2), (0, 0, 0), (3, 0, 0))$
~~7)~~ $((0, 1, 0), (0, 2, 0))$ ☒ $((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 2, 3))$
7. ☒ Ispod svake matrice napisati broj koji predstavlja njen rang.
 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
3 2 2 2 1 2 1 0
8. ☒ Matrice i rangovi linearnih transformacija $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x) = (0, 9x)$ i $g, h, r, s: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$,
 $g(x, y, z) = (x + y, x + z)$, $h(x, y, z) = (x - y, 0)$, $r(x, y, z) = (0, y)$, $s(x, y, z) = (x - y - z, 6y)$ i $p(x, y, z) = (z, 0)$ su: (Rang upisati ispod odgovarajuće matrice)
 $M_f = \begin{bmatrix} 0 \\ 9 \end{bmatrix}$ $M_g = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $M_h = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $M_r = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $M_s = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 6 & 0 \end{bmatrix}$ $M_p = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
1 2 1 1 2 1 1
9. ☒ Neka je $ABCD$ paralelogram, gde mu je BD dijagonala, a S presek dijagonala. U zavisnosti od $\vec{r}_S, \vec{r}_B$ i $\vec{r}_A$ napisati vektore položaja tačaka C i D : $\vec{r}_C = 2\vec{r}_S - \vec{r}_A$ $\vec{r}_D = 2\vec{r}_S - \vec{r}_B$

10. ☒ Izračunati vektore položaja $\vec{r}_{Q'}$ i $\vec{r}_{Q''}$ projekcija tačke $Q(5, -3, 4)$ na pravu a i ravan α , ako je $A \in a$, $a \parallel \vec{a}$, $B \in \alpha$, $\vec{n} \perp \alpha$ i pri čemu je $A(0, -5, -4)$, $\vec{a} = (6, 3, 1)$, $B(3, 2, 2)$, $\vec{n} = (1, -1, 1)$.
 $\vec{r}_{Q'} = (\frac{11}{13}, -\frac{42}{13}, -\frac{70}{13})$ $\vec{r}_{Q''} = (2, 0, 1)$
11. ☒ U vektorskom prostoru $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}, +, \cdot)$ navesti po jedan primer vektorskog podprostora koji je redom dimenzije 0, 1, 2 i 3. Primer navesti jednačinom ili geometrijskim opisom.
 $\dim V_0 = 0 \quad V_0: x=y=z=0$ $\dim V_1 = 1 \quad V_1: x=y=0, z \in \mathbb{R}$ $\dim V_2 = 2 \quad V_2: x=0 \wedge y \in \mathbb{R} \wedge z \in \mathbb{R}$ $\dim V_3 = 3 \quad V_3: x, y, z \in \mathbb{R}$
12. ☒ Koji od sledećih podskupova $U \subseteq \mathbb{R}^n = \{x = (x_1, \dots, x_n) | x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$ je podprostor:
☒ a) $U = \{x \in \mathbb{R}^n | x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0\}$ ☒ b) $U = \{x \in \mathbb{R}^n | x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1\}$
☒ c) $U = \{x \in \mathbb{R}^n | \forall i, x_i \in \{0, 1\}\}$ ☒ d) $U = \{x \in \mathbb{R}^n | \forall i, x_i \in [0, \infty)\}$
13. ☒ Navesti dve baze vektorskog prostora $\mathbb{R}^3$:
 $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ i $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 3)\}$
15. ☒ Neka je $p = (1, 0, 1)$, $q = (0, 2, 2)$, $r = (0, 0, 3)$, $s = (0, 4, 0)$. Zaokružiti slovo ispred zavisne n -torke:
~~a)~~ (p, q, r) , ☒ b) (q, r, s) , ~~c)~~ (p, q) , ~~d)~~ (p, r) , ~~e)~~ (p, s) , ~~f)~~ (q, r) , ~~g)~~ (q, s) , ~~h)~~ (r, s) .
16. ☒ Trojka (v_1, v_2, v_3) je generatorna za V ako: ~~a)~~ svaki od vektora v_1, v_2, v_3 je različit od nula-vektora.
☒ b) Za svaki vektor v važi $v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3$ za neke skalare $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. ~~c)~~ $\dim(V) = 3$.
17. ☒ Za linearno zavisnu trojku vektora (v_1, v_2, v_3) prostora V važi: ~~a)~~ par (v_1, v_2) je uvek linearno zavisan
☒ b) par (v_1, v_2) može biti linearno zavisan ili nezavisan u zavisnosti od izbora vektora (v_1, v_2, v_3) ~~c)~~ par (v_1, v_2) je uvek linearno nezavisan

18. Za linearno nezavisni par vektora (v_1, v_2) prostora V važi:
~~a) trojka (v_1, v_2, v_3) je uvek linearno zavisna~~
~~b) trojka (v_1, v_2, v_3) može biti linearno zavisna ili nezavisna u zavisnosti od izbora vektora (v_1, v_2, v_3)~~
~~c) trojka (v_1, v_2, v_3) je uvek linearno nezavisna.~~

19. Uređena trojka nekomplanarnih slobodnih vektora $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ je:
~~a) uvek linearno nezavisna~~ ~~b) uvek linearno zavisna~~
~~c) u zavisnosti od datih vektora nekada zavisna, a nekada nezavisna.~~

20. Za svaku linearnu transformaciju $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ i svako $x, y \in \mathbb{R}$ tačno je:
~~a) $f(x, x) = 2x$.~~ ~~b) $f(0, 0) = 0$.~~ ~~c) $f(x, y) = x + y$.~~ ~~d) $f(x, y) = xy$.~~

21. Šta od navedenog nije aksioma vektorskog prostora:
~~a) $(\forall x, y \in V)(\forall \alpha \in F) \alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$~~
~~b) $(\forall x \in V)(\forall \alpha, \beta \in F) (\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$~~ ~~c) $(\forall x, y \in V) x \cdot y = y \cdot x$~~ ~~d) $(\forall x \in V) 0 \cdot x = 0$~~

22. Za proizvoljne kvadratne matrice A, B, C reda n važi:
~~a) $\text{Rang}(AB) = \text{Rang}(A)\text{rang}(B)$~~ ~~b) $A + (B + C) = (A + B) + C$~~ ~~c) $\det(AB) = \det(A)\det(B)$~~
~~d) $AB = BA$~~ ~~e) $A + B = B + A$~~

23. Linearna transformacija $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (px + y, x + py)$ je izomorfizam akko $p \in \mathbb{R}$ _____

24. Sistem linernih jednačina nad poljem realnih brojeva $ax + y = 1 \wedge x + by = 0$ je:
 određen za ~~$a \neq 0 \wedge b \in \mathbb{R}$~~ , 1 puta neodr. za _____,
 2 puta neodr. za _____, protivrečan za _____.

25. Vektor $\vec{s}$ simetrale $\angle BAC$ trougla ABC izraziti kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ i $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$:
 $\vec{s} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} + \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$

26. Koji od vektora su karakteristični vektori za matricu $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$? ~~a) $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$~~ ~~b) $\begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix}$~~ ~~c) $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$~~

27. Karakteristični polinom matrice $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ je: $\lambda^2 - \lambda + 8$

28. Koje od tvrđenja je tačno za bilo koje kvadratne matrice A, B, C reda 3 i svaki skalar λ
~~a) $\det(A - B) = \det(A) - \det(B)$~~ ~~b) $\det(\lambda A) = \lambda^3 \det(A)$~~ ~~c) $\det(ABC) = \det(A)\det(B)\det(C)$~~

29. Neka $A \sim B$ znači da su matrice A i B ekvivalentne. Tada važi:
~~a) $A \sim B \Leftrightarrow |\det(A)| = |\det(B)|$~~ ~~b) $\det(A) = \det(B) \Rightarrow A \sim B$~~ ~~c) $A \sim B \Rightarrow \det(A) = \det(B)$~~
~~d) $A \sim B \Rightarrow (\det(A) = 0 \Leftrightarrow \det(B) = 0)$~~ ~~e) $A \sim B \Leftrightarrow (\text{Rang}(A) = 0 \Leftrightarrow \text{Rang}(B) = 0)$~~

30. Koje od tvrđenja je tačno ako je matrica A' dobijena od matrice A elementarnim transformacijama.
~~a) $\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow \det(A') \neq 0$~~ ~~b) $\text{Rang}(A) = \text{Rang}(A')$~~
~~c) $\det(A) = \lambda \det(A')$ za neki skalar λ~~ ~~d) $\det(A) = \lambda^2 \det(A')$ za neki skalar λ~~

31. Koje od tvrđenja je tačno ako je A kvadratna matrica reda n :
~~a) $\text{Rang}(A) = 0 \Rightarrow \det(A) = 0$~~ ~~b) $\det(A) = 0 \Leftrightarrow \text{Rang}(A) \leq n - 1$~~ ~~c) $\text{Rang}(A) = n \Rightarrow \det(A) \neq 0$~~ ~~d) $\text{Rang}(A) = n \Rightarrow \det(A) = 0$~~

32. Izračunati vektor položaja $\vec{r}_T$ tačke T , prodora prave $p: \vec{r} = (7, 7, 4) + t(2, 2, 1)$, $t \in \mathbb{R}$ kroz ravan
 $\alpha: \vec{r} \cdot (-1, 0, 1) = (2, 5, 2) \cdot (-1, 0, 1)$. $\vec{r}_T = (1, 1, 1)$

33. Ako je $f: V \rightarrow W$ izomorfizam vektorskih prostora, tada je:
~~a) postoji f^{-1}~~ ~~b) $V = W$~~
~~c) za svaku zavisnu n -torku vektora $(v_1, \dots, v_n)$ iz V , n -torka $(f(v_1), \dots, f(v_n))$ je zavisna u W .~~

34. Za koje vrednosti parametara a, b su navede funkcije linearne transformacije, i za one koje jesu, naći odgovarajuću matricu i diskutovati njen rang:

$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x, y, z) = (ax + by + z, a + b)$ $a = b = 0$ $M_f = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\text{rang}(M_f) = 1$

$g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^1$, $g(x, y) = \sin(ax) + \cos(by)$ $a, b \in \mathbb{R}$ $M_g = \begin{bmatrix} \sin(a) & \cos(b) \end{bmatrix}$ $a = 0, b \in \mathbb{Z} \wedge b = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \text{rang}(M_g) = 0$
 $a \neq 0, b \in \mathbb{Z} \vee b = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \text{rang}(M_g) = 1$

1. Neka tačke $P(1, 2, 0)$, $Q(2, 1, 0)$ i $R(1, 1, 1)$ pripadaju ravni α . Napisati bar jedan jedinični vektor $\vec{n}$ normalan na α i jedan vektor $\vec{m}$ paralelan sa α , $\vec{n} = (1, 1, 1)$, $\vec{m} = (0, 1, -1)$. Ako je $(A, B, C, D) = (1, 1, 1, -3)$, tada je $Ax + By + Cz + D = 0$ jednačina ravni α . Napisati koordinate tačke $M \in \alpha$ ravni α koja je najbliža koordinatnom početku. $M(1, 1, 1)$.

2. Za koje vrednosti parametra $a \in \mathbb{R}$ sistem linearnih jednačina $x + ay = 1 \wedge ax + y = 1$ nad poljem realnih brojeva je: 1) neodređen: $a \neq -1 \wedge a \neq 1$ 2) određen: $a = 1$ 3) kontradiktoran: $a = -1$

3. Za vektore $\vec{a} = (1, 1, 0)$ i $\vec{b} = (0, 1, 1)$ izračunati: 1) $|\vec{a}| = \sqrt{2}$ 2) $|\vec{b}| = \sqrt{2}$
3) $2\vec{a} - \vec{b} = (2, 1, -1)$ 4) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1$
5) $|\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{3}$ 6) $\sin \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

4. Koje od sledećih uređenih n -torki jesu nezavisne za vektorski prostor $\mathbb{R}^3$: 1) $((0, 0, -1), (0, 4, 0), (9, 0, 0))$
2) $((1, 3, -2), (-2, -6, 4))$ 3) $((0, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 0), (1, 2, 3))$ 4) $((1, 0, 1), (1, 1, 0), (2, 1, 1))$

5. $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$ $\begin{vmatrix} 5 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -8$ $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

6. Matrice linearnih transformacija $f(x, y) = (2x, x, y)$, $g(x, y, z) = y$, $h(x, y) = (x, y)$ i $s(x, y, z) = (y, z, x + x)$ su:

$$M_f = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad M_g = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad M_h = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad M_s = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

7. Ispod svake matrice napisati broj koji predstavlja njen rang.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 0 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 7 & 7 \end{bmatrix}$$

8. Odrediti sve vrednosti realnog parametara a za koje je sistem linearnih jednačina
 $ax + y = a$
 $-x + ay = a$
1) kontradiktoran: $a \in \mathbb{R}$
2) određen: $a \in \mathbb{R}$
3) jednostruko neodređen: $a \in \mathbb{R}$
4) dvostruko neodređen: $a \in \mathbb{R}$

9. Neka je $ABCD$ paralelogram, a tačke P i Q redom sredine duži AB i AD . (BD je dijagonala paralelograma). Izraziti vektor $\vec{PQ}$ kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{a} = \vec{AC}$ i $\vec{b} = \vec{BC}$. $\vec{PQ} = \frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$

10. Napisati $\vec{x} = (2, 0, 1)$ kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{a} = (1, 0, 1)$, $\vec{b} = (2, 1, 1)$ i $\vec{c} = (1, 1, 1)$:
 $\vec{x} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$

11. Koordinate projekcija A' tačke $A(1, 1, 2)$ na pravu određenu sa $x = y = z$ je: $A'(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3})$

12. Vektor položaja $\vec{r}_T$ tačke prodora prave $p: \vec{r} = \vec{r}_Q + t\vec{l}$ kroz ravan $\alpha: \vec{m}\vec{r} = \vec{m}\vec{r}_w$ je
 $\vec{r}_T = \vec{r}_Q + \frac{(\vec{r}_w - \vec{r}_Q) \cdot \vec{m}}{\vec{l} \cdot \vec{m}} \vec{l}$

13. Normalna projekcija vektora $\vec{x} = 3\vec{i} + 3\vec{j} + 3\vec{k}$ na ravan $\alpha: x + 2y + z = 0$ je: $\text{pr}_\alpha(\vec{x}) = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$

14. Koji od vektora su karakteristični vektori za matricu $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$? a) $\begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} -3 \\ -3 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$

15. Koje od tvrdjenja je tačno za bilo koje kvadratne matrice A, B, C reda 3 i svaki skalar λ :
1) $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ 2) $(B+C)A = AB+CA$ 3) $\det(\lambda A) = \lambda^3 \det(A)$
4) $\det(AB) = \det(B)\det(A)$ 5) $(AB)^2 = A^2B^2$ 6) $\text{rang}(AB) = \text{rang}(BA)$
7) $A(B-C) = BA-CA$ 8) $A(BC) = (BA)C$

16. Koja od sledećih tvrdnji je tačna za svaka dva slobodna nenula vektora $\vec{x}$ i $\vec{a}$: a) $(\vec{a} - \text{pr}_{\vec{a}}\vec{x})\vec{x} = 0$
b) $(\vec{x} - \text{pr}_{\vec{a}}\vec{x})\vec{a} = 0$ c) $(\vec{a} - \text{pr}_{\vec{x}}\vec{a}) \times \vec{x} = 0$ d) $(\vec{x} - \text{pr}_{\vec{a}}\vec{x}) \times \vec{a} = 0$ e) ništa od prethodnog

17. Neka su a, b i c nezavisni vektori. Tada uređena trojka vektora $(a+b+c, b+c, b-c)$ je:
a) uvek zavisna b) uvek nezavisna c) nekad zavisna, a nekad nezavisna, zavisi od izbor vektora a, b, c .

17.

• Neka su a, b i c zavisni vektori. Tada uređena trojka vektora $(a+c, a+b, a-b+2c)$ je:

- a) uvek zavisna b) uvek nezavisna c) nekad zavisna, a nekad nezavisna, zavisi od izbor vektora a, b, c .

19. • Nenula vektori $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ i $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$ su **nekolinearni** ako je 1) $\vec{a} \times \vec{b} = 0$

2) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ 3) $\text{rang} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} = 1$ 4) $\text{rang} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} \leq 2$ 5) $\text{rang} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} \leq 1$

6) $\vec{a}$ i $\vec{b}$ su zavisni 7) $(\exists \lambda \in \mathbb{R}) \vec{a} = \lambda \vec{b}$ 8) $\vec{a} \parallel \vec{b}$ 9) $(\forall \lambda \in \mathbb{R}) (\vec{a} \neq \lambda \vec{b} \wedge \lambda \vec{a} \neq \vec{b})$

10) $(\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}) \alpha \vec{a} + \beta \vec{b} = 0 \Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 \neq 0$

20.

• Vektori $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$, $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$ i $\vec{c} = c_1\vec{i} + c_2\vec{j} + c_3\vec{k}$ su **nekomplanarni** ako je:

1) $\text{rang} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} = 2$ 2) $\text{rang} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \leq 3$ 3) $\text{rang} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} = 3$

4) $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0$ 5) $\vec{a}(\vec{b} \times \vec{c}) \neq 0$ 6) $(\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}) \vec{a} = \alpha \vec{b} + \beta \vec{c}$

7) $\alpha \vec{a} + \beta \vec{b} + \gamma \vec{c} = 0 \Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \neq 0$ 8) $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ je nezavisna.

21.

• Neka je $\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}^3$ definisana sa $\varphi(x_1\vec{i} + x_2\vec{j} + x_3\vec{k}) = (x_3, x_2, x_1)$ gde su $(V, \mathbb{R}, +, \cdot)$ i $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}, +, \cdot)$ vektorski prostori slobodnih vektora i uređenih trojki. Da li je funkcija $\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}^3$

- 1) linearna transformacija 2) injektivna 3) surjektivna 4) bijektivna 5) izomorfizam

22. • Neka je $\mathcal{M}$ skup svih matrica formata $(3, 5)$ čiji svi elementi su iz skupa realnih brojeva $\mathbb{R}$. Tada je:

1) $\text{rang} : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ 2) $\text{rang} : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{N}$ 3) $\text{rang} : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$ 4) $\text{rang} : \mathcal{M} \xrightarrow{1-1} \mathbb{N} \cup \{0\}$

5) $\text{rang} : \mathcal{M} \xrightarrow{n_a} \{0, 1, 2, 3\}$

23. • Neka je $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ generatorna u prostoru V , $(c_1, c_2, \dots, c_n)$ zavisna za prostor V i $\dim V = m$. Tada je 1) $m \leq k \leq n$ 2) $n \leq k \leq m$ 3) $m \leq k$ 4) $k \leq m \leq n$ 5) $k \leq n \leq m$ 6) $m \leq n \leq k$

24. • Neka je $\vec{r}_A$ vektor položaja tačke $A(3, 1, 2)$, $|\vec{AB}| = |\vec{BC}| = 9$. Odrediti $\vec{r}_C$ ako je $\vec{AB} \parallel \vec{a} = (1, 4, 8)$, $\vec{BC} \parallel \vec{b} = (-8, 1, 4)$ i ako su smerovi vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ suprotni smerovima redom vektora $\vec{AB}$ i $\vec{BC}$.

$\vec{r}_C = (70, -4, -70)$

25. • Koji od sledećih podskupova $U \subseteq \mathbb{R}^3$ je potprostor i za one koji jesu napiši desno od njih njihovu dimenziju:

1) $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = 0\}$, $\dim U = 2$

2) $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = 0\}$, $\dim U = 1$

3) $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \cdot 1 = x\}$, $\dim U = 3$

4) $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 2x\}$, $\dim U = 2$

26. • Ako je A kvadratna matrica reda 5, tada je: 1) $\det A = 0 \Leftrightarrow \text{rang } A = 0$ 2) $\det A = 0 \Leftrightarrow \text{rang } A \leq 4$, 3) $\det A = 0 \Rightarrow \text{rang } A = 5$ 4) $\text{rang } A = 5 \Rightarrow \det A \neq 0$, 5) $\text{rang } A = 5 \Leftrightarrow \det A \neq 0$, 6) $\text{rang } A = 5 \Leftrightarrow \exists A^{-1}$

27. • Neka su $\mathbf{a}_1 = (a_{11}, \dots, a_{1n})$, $\mathbf{a}_2 = (a_{12}, \dots, a_{2n})$, $\dots$, $\mathbf{a}_n = (a_{1n}, \dots, a_{nn})$ vektori kolone matrice $A = A_{nn} = [a_{ij}]_{nn}$, neka je $V = \text{Lin}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n) = \{\alpha_1 \mathbf{a}_1 + \alpha_2 \mathbf{a}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{a}_n \mid \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}\}$ i neka je $\mathbf{a}_i^2$ skalarni proizvod vektora $\mathbf{a}_i$ sa samim sobom. Tada je: 1) $\mathbf{a}_1 = \dots = \mathbf{a}_n = 0 \Leftrightarrow \mathbf{a}_1^2 + \dots + \mathbf{a}_n^2 = 0$ 2) $\dim V \neq 0 \Leftrightarrow \text{rang } A \neq 0$ 3) $\dim V = 0 \Leftrightarrow \mathbf{a}_1 = \dots = \mathbf{a}_n = 0$ 4) $\dim V = 0 \Leftrightarrow \mathbf{a}_1^2 + \dots + \mathbf{a}_n^2 \neq 0$ 5) $\text{rang } A \neq 0 \Leftrightarrow \mathbf{a}_1 = \dots = \mathbf{a}_n = 0$ 6) $\text{rang } A = 0 \Leftrightarrow \mathbf{a}_1^2 + \dots + \mathbf{a}_n^2 \neq 0$

28. • Za svaku nenula linearnu transformaciju $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ važi da je:

- 1) injektivna 2) bijektivna 3) izomorfizam 4) surjektivna

5) ništa od prethodnog

29. • Postoji linearna transformacija $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ za koju važi da je:

- 1) injektivna 2) surjektivna 3) bijektivna 4) izomorfizam

5) ništa od prethodnog

30. • Za svaku surjektivnu linearnu transformaciju $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ sledi da je transformacija f :

- 1) injektivna 2) bijektivna 3) izomorfizam

4) ništa od prethodnog

33. Za svaku injektivnu linearnu transformaciju $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ sledi da je transformacija f :
- ① sirjektivna ② bijektivna ③ izomorfizam ④ ništa od prethodnog
34. Za svaki izomorfizam $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ i njegovu matricu A važi:
- ① f je injektivna ② postoji A^{-1}
 ③ $n = m$ ④ f je sirjektivna ⑤ f je bijektivna ⑥ A je regularna ⑦ $\det A \neq 0$ ⑧ ništa od prethodnog
35. Za svaki konačno dimenzioni vektorski prostor V postoji homogen sistem linearnih jednačina, čiji skup svih rešenja je vektorski prostor izomorfan prostoru V . Zakruži tačan odgovor **DA** NE
36. Neka je $a = (2, 2, 0)$, $b = (-3, 3, 0)$, $c = (1, -1, 0)$, $d = (-1, 1, 0)$, $e = (0, 0, 1)$, $f = (1, 0, 0)$, $g = (1, 2, 0)$. Zaokružiti broj koji je dimenzija potprostora V vektorskog prostora $\mathbb{R}^3$:
- 1) $V = L(b, c, d) \Rightarrow \dim(V)$ je: ① 2, ② 3
 2) $V = L(e, f, g) \Rightarrow \dim(V)$ je: 1, ② 2, ③ 3 3) $V = L(a, b) \Rightarrow \dim(V)$ je: 1, ② 2, ③ 3
 4) $V = L(e, f, g) \Rightarrow \dim(V)$ je: 1, ② 2, ③ 3 5) $V = L(b, c, e) \Rightarrow \dim(V)$ je: 1, ② 2, ③ 3
 6) $V = L(a, b, c) \Rightarrow \dim(V)$ je: 1, ② 2, ③ 3 7) $V = L(a, g) \Rightarrow \dim(V)$ je: 1, ② 2, ③ 3
37. Neka su $\vec{x}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ slobodni vektori i $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ jedinični međusobno normalni i α, β i γ uglovi koje vektor $\vec{x}$ obrazuje sa redom vektorima $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. Tada je:
- ① $(\vec{x}\vec{i})\vec{i} + (\vec{x}\vec{j})\vec{j} + (\vec{x}\vec{k})\vec{k} = \vec{x}$ ② $(\vec{x}\vec{i}, \vec{x}\vec{j}, \vec{x}\vec{k}) \in \mathbb{R}^3$
 ③ $(\vec{x}\vec{i})^2 + (\vec{x}\vec{j})^2 + (\vec{x}\vec{k})^2 = \vec{x}\vec{x}$ ④ $(\vec{x}\vec{i})\vec{i} + (\vec{x}\vec{j})\vec{j} + (\vec{x}\vec{k})\vec{k} \in \mathbb{R}^3$ ⑤ $(\vec{x}\vec{i})\vec{i} + (\vec{x}\vec{j})\vec{j} + (\vec{x}\vec{k})\vec{k} = \vec{x}\vec{x}$
 ⑥ $(|\vec{x}| \cos \alpha)\vec{i} + (|\vec{x}| \cos \beta)\vec{j} + (|\vec{x}| \cos \gamma)\vec{k} = \vec{x}$ ⑦ $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$

KOLOKVIJUM 2, PRIMER 14

1. Za ravan α kojoj pripadaju tačke $A(2, 0, 0)$, $B(0, 2, 0)$ i koja je paralelna sa z -osom napisati jedan njen vektor normale $\vec{n}_\alpha = (1, 1, 0)$ i koordinate njene tačke $M(1, 1, 0)$ koja je najbliža koordinatnom početku.
2. Ako je $\vec{a} = (1, 2, 2)$ i $\vec{b} = (2, 1, -2)$, tada je
 $|\vec{a}| = 3$ $|\vec{b}| = 3$ $\vec{a}\vec{b} = 0$ $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{2}$ $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix}$
3. Za koje vrednosti parametra $a \in \mathbb{R}$ sistem jednačina $ax + y = 1 \wedge ax - ay = a$ nad poljem realnih brojeva je:
- 1) neodređen: $a = 0$ 2) određen: $a \neq 0 \wedge a \neq -1$ 3) kontradiktoran: $a = -1$
4. $\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 2 & 7 & 9 \end{vmatrix} = -8 \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$
5. Zaokružiti cifru (cifre) ispred uređenih n -torki koje su NEZAVISNE u vektorskom prostoru uređenih trojaka $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$:
- ① $((0, 1, 0))$ ② $((1, 2, 1), (1, 1, 0), (2, 3, 1))$ ③ $((1, 0, 0), (2, 0, 2))$
 ④ $((1, 0, 0), (0, 2, 0), (0, 0, 3))$ ⑤ $((1, 1, 1), (2, 2, 2))$ ⑥ $((0, 0, 2), (0, 0, 0), (3, 0, 0))$
 ⑦ $((0, 1, 0), (0, 2, 0))$ ⑧ $((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 2, 3))$
6. Ispod svake matrice napisati broj koji predstavlja njen rang.
- $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & -6 & 2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
 2 1 1 2 1 1 0
7. Matrice i rangovi linearnih transformacija $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x) = (2x, 9x)$ i $g, h, r, s, p: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $g(x, y, z) = (x, y)$, $h(x, y, z) = (0, 0)$, $r(x, y, z) = (y, y)$, $s(x, y, z) = (x - y - z, 6y + x)$ i $p(x, y, z) = (z, z)$ su: (Rang upisati ispod odgovarajuće matrice)

$$M_f = \begin{bmatrix} 2 \\ 9 \end{bmatrix} \quad M_g = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad M_h = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad M_r = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad M_s = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 6 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad M_p = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

8. Neka je je $ABCD$ paralelogram, gde mu je BD dijagonala, a S preseka dijagonala. U zavisnosti od $\vec{r}_A, \vec{r}_B$ i $\vec{r}_S$ napisati vektore položaja tačaka C i D . $\vec{r}_C = 2\vec{r}_S - \vec{r}_A$ $\vec{r}_D = 2\vec{r}_S - \vec{r}_B$

9. ● Odrediti sve vrednosti realnog parametra a za koje je sistem linearnih jednačina

$$\begin{aligned} 2ax + ay &= a \\ 3ax + 2ay &= 5a \end{aligned}$$
 1) kontradiktoran: _____
 2) određen: $a \neq 0$
 3) 1 puta neodređen: _____
 4) 2 puta neodređen: $a = 0$
10. ● Neka je $ABCD$ paralelogram, a tačke P i Q redom sredine duži AD i DC . (BD je dijagonala paralelograma). Izraziti vektor $\vec{BQ} + \vec{BP}$ kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{a} = \vec{AC}$ i $\vec{b} = \vec{BC}$.

$$\vec{BQ} + \vec{BP} = -\frac{3}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$$
11. ● Izraziti vektor $\vec{x} = (3, 4, 0)$ kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{a} = (1, 2, 1)$, $\vec{b} = (1, 1, -1)$ i $\vec{c} = (1, 1, 0)$:

$$\vec{x} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$$
12. ● U vektorskom prostoru $(\mathbb{R}^5, \mathbb{R}, +, \cdot)$, šestorka vektora (a, b, c, d, e, f) je:
 ① uvek zavisna ② nikad baza, ③ može ali ne mora da bude generatorna.
13. ● U vektorskom prostoru $(\mathbb{R}, \mathbb{R}, +, \cdot)$, vektor $a \neq 0$ je:
 ① uvek nezavisan, ② uvek zavisna, ③ uvek baza.
14. ● Koji od vektora su karakteristični vektori za matricu $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$?
 ① $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ ② $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ ③ $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$
15. ● Koje od tvrđenja je tačno ako je kvadratna matrica B dobijena od matrice A elementarnim transformacijama.
 ① $\det(A) = \det(B)$ ② $\det(A) \neq 0 \wedge \det(B) \neq 0$ ③ $\text{Rang}(A) = \text{Rang}(B)$ ④ $A \cdot B = I$
 ⑤ $A = \alpha B$ za neki skalar α ⑥ matrice A i B imaju iste karakteristične korene ⑦ $\exists A^{-1} \Leftrightarrow \exists B^{-1}$
16. ● Neka su $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ slobodni vektori i $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ jedinični međusobno normalni. Tada je:
 ① $(\vec{x}\vec{i})\vec{i} + (\vec{x}\vec{j})\vec{j} + (\vec{x}\vec{k})\vec{k} = \vec{x}$ ② $(\vec{x}\vec{i}, \vec{x}\vec{j}, \vec{x}\vec{k}) \in \mathbb{R}^3$ ③ $(\vec{x}\vec{i})^2 + (\vec{x}\vec{j})^2 + (\vec{x}\vec{k})^2 = \vec{x}\vec{x}$
 ④ $(\vec{x}\vec{i})\vec{i} + (\vec{x}\vec{j})\vec{j} + (\vec{x}\vec{k})\vec{k} \in \mathbb{R}^3$ ⑤ $(\vec{x}\vec{i})\vec{i} + (\vec{x}\vec{j})\vec{j} + (\vec{x}\vec{k})\vec{k} = \vec{x}\vec{x}$
17. ● Neka je $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ uređena trojka nekolinearnih slobodnih vektora. Tada:
 ① trojka $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ je uvek linearno nezavisna ② trojka $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ je uvek linearno zavisna ③ postoje takvi vektori $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ da je trojka $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ nezavisna ④ postoje takvi vektori $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ da je trojka $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ zavisna
18. ● U vektorskom prostoru slobodnih vektora, par vektora (a, b) je:
 ① uvek nezavisan, ② uvek zavisna, ③ nekad nezavisan a nekad zavisna.
19. ● Izračunati vektor položaja $\vec{r}_T$ tačke T , projekcije tačke $(1, 1, 1)$ na pravu $p: \frac{x-1}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}$. $\vec{r}_T = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$
20. ● Koja od sledećih tvrdnji je tačna za svaka dva slobodna nenula vektora $\vec{x}$ i $\vec{a}$:
 ① $(\vec{a} - \text{pr}_{\vec{x}}\vec{a})\vec{x} = 0$ ② $(\vec{x} - \text{pr}_{\vec{a}}\vec{x})\vec{a} = 0$ ③ $(\vec{a} - \text{pr}_{\vec{x}}\vec{a}) \times \vec{x} = 0$ ④ $(\vec{x} - \text{pr}_{\vec{a}}\vec{x}) \times \vec{a} = 0$
 ⑤ ništa od prethodnog
21. ● Neka su a, b i c proizvoljni nezavisni vektori. Tada uređena trojka vektora $(a+b-c, b+c, a+b-c)$ je:
 ① uvek zavisna ② uvek nezavisna ③ nekad zavisna, a nekad nezavisna, zavisi od izbor vektora a, b, c .
22. ● Neka su a, b i c zavisni vektori. Tada uređena trojka vektora $(2a+3c, a+4b, 7a-b+5c)$ je:
 ① uvek zavisna ② uvek nezavisna ③ nekad zavisna, a nekad nezavisna, zavisi od izbor vektora a, b, c .
23. ● Vektori $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$, $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$ i $\vec{c} = c_1\vec{i} + c_2\vec{j} + c_3\vec{k}$ su nekomplanarni ako je:
 ① $\text{rang} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} = 2$ ② $\text{rang} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \leq 3$ ③ $\text{rang} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} = 3$
 ④ $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0$ ⑤ $\vec{a}(\vec{b} \times \vec{c}) \neq 0$ ⑥ $(\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}) \vec{a} = \alpha\vec{b} + \beta\vec{c}$
 ⑦ $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = 0 \Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 0$ ⑧ $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ je zavisna.
24. ● Ako je $\vec{x} = x_1\vec{i} + x_2\vec{j} + x_3\vec{k}$ i $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definisana sa $f(x_1, x_2, x_3) = \vec{k} \cdot \vec{x}$, tada funkcija f uvek jeste:
 ① linearna transformacija ② injektivna ③ surjektivna ④ bijektivna ⑤ izomorfizam

25. Za svaku nenula linearnu transformaciju $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ i svako $x, y, \lambda, v \in \mathbb{R}$ tačno je: ① $x = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$
 ② $f(0) = 0$ ③ $f(xy) = yx$ ④ $f(xy) = y f(x)$ ⑤ $f(x) = ax$ za neko $a \in \mathbb{R}$ ⑥ f je izomorfizam

26. Neka je $\varphi: V \rightarrow \mathbb{R}^3$ definisana sa $\varphi(x_1\vec{i} + x_2\vec{j} + x_3\vec{k}) = (x_1 + x_2, x_1 + x_3, 2x_1 + x_2 + x_3)$, gde su $(V, \mathbb{R}, +, \cdot)$ i $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}, +, \cdot)$ vektorski prostori slobodnih vektora i uređenih trojki. Da li je funkcija $\varphi: V \rightarrow \mathbb{R}^3$
 ① linearna transformacija ② injektivna ③ surjektivna ④ bijektivna ⑤ izomorfizam

27. Neka je $\mathcal{M}$ skup svih kvadratnih matrica reda 2 čiji elementi su iz skupa realnih brojeva $\mathbb{R}$. Tada je:
 ① $\det: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ ② $\det: \mathcal{M} \xrightarrow{1-1} \mathbb{R}$ ③ $\det: \mathcal{M} \xrightarrow{na} \mathbb{R}$ ④ $\det: \mathcal{M} \xrightarrow{1-1} \mathbb{R}$ ⑤ $\det$ je linearna

28. Neka je $\mathcal{M}$ skup svih matrica formata $(1, 2)$ čiji svi elementi su iz skupa realnih brojeva $\mathbb{R}$. Tada je:
 ① $\text{rang}: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ ② $\text{rang}: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{N}$ ③ $\text{rang}: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$ ④ $\text{rang}: \mathcal{M} \rightarrow \{0, 1, 2\}$
 ⑤ $\text{rang}: \mathcal{M} \xrightarrow{na} \{0, 1, 2\}$

29. Neka je $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ generatna u prostoru V , $(c_1, c_2, \dots, c_m)$ nezavisna za prostor V i $\dim V = 4$. Tada je ① $m \leq 4 \leq n$ ② $n \leq 4 \leq m$ ③ $n \leq m \leq 4$ ④ $4 \leq m \leq n$ ⑤ $4 \leq n \leq m$ ⑥ $n \geq 4$

30. Neka je $\vec{r}_A$ vektor položaja tačke A , $|\vec{AB}| = 3$ i $|\vec{BC}| = 6$. Odrediti $\vec{r}_C$ u zavisnosti od $\vec{r}_A$, $\vec{i}$ i $\vec{j}$, ako je $\vec{AB} \parallel \vec{i}$, $\vec{BC} \parallel \vec{j}$ i vektori $\vec{AB}$ i $\vec{i}$ su istog smera, a vektori $\vec{BC}$ i $\vec{j}$ suprotnog. $\vec{r}_C = \vec{r}_A + 3\vec{i} - 6\vec{j}$

31. Koji od sledećih podskupova $U \subseteq \mathbb{R}^3$ je potprostor i za one koji jesu napiši desno od njih njihovu dimenziju:

① $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^3 + y^3 = 0\}$, $\dim U = 2$

② $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 0\}$ $\dim U = 1$

③ $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 0\}$ $\dim U = 0$

④ $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \geq 0\}$ $\dim U = 3$

32. Linearne transformacije $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ i $G: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ su uvek oblika:
 $f(x, y) = (2x, 3x + 4y, 5y)$ $g(x, y) = 2x + 3y$ $h(x) = 2x$ $F(x, y, z) = (x, y, z)$ $G(x) = (2x, 3x)$

33. Linearne transformacije f i g definisane su sa

$$f(x_1, x_2) = (x_1 - 2x_2, 2x_1 + 3x_2) \text{ i } g(x_1, x_2) = (x_1 - 2x_2, x_1 - 3x_2).$$

a) Po definiciji kompozicije o odrediti $(f \circ g)(x_1, x_2) = f(g(x_1, x_2)) = (-x_1 + 4x_2, 5x_1 - 7x_2)$

b) Napisati matrice M_f i M_g koje odgovaraju linearnim transformacijama f i g :

$$M_f = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, M_g = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}.$$

c) Izračunati proizvod matrica $M_f \cdot M_g = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 5 & -13 \end{bmatrix}$, $M_g^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{12}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{5}{7} & \frac{2}{7} \end{bmatrix}$ i $g^{-1}(x_1, x_2) = (\frac{12}{7}x_1 + \frac{1}{7}x_2, \frac{5}{7}x_1 + \frac{2}{7}x_2)$

d) Napisati linearnu transformaciju $h(x_1, x_2)$ kojoj odgovara matrica $M_f \cdot M_g$ tj. $h(x_1, x_2) = (-x_1 + 4x_2, 5x_1 - 7x_2)$

e) Da li je $h = f \circ g$ tj. da li je $(\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}) h(x_1, x_2) = (f \circ g)(x_1, x_2)$? **DA** NE

KOLOKVIJUM 2, PRIMER 15

1. Za pravu p kojoj pripadaju tačke $A(2, 0, 0)$, $B(0, 2, 0)$ napisati jedan vektor koji je paralelan sa njom
 $\vec{p} = (-2, 2, 0)$, jedan vektor normalan na nju i na vektor $\vec{k}$ i koordinate njene tačke $M(1, 1, 0)$ koja je najbliža z -osi.

2. Ako je $\vec{a} = (1, 1, 2)$ i $\vec{b} = (2, 1, 0)$, tada je $|\vec{a}| = \sqrt{6}$ $|\vec{b}| = \sqrt{5}$ $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3$ $\cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{3}{\sqrt{30}}$ $\vec{a} \times \vec{b} = (-2, 2, -1)$

3. Za koje vrednosti parametra $a \in \mathbb{R}$ sistem jednačina $2ax + y = 1 \wedge ax + ay = a$ nad poljem realnih brojeva je: 1) neodređen: $a = 0 \vee a = \frac{1}{2}$ 2) određen: $a \neq 0 \wedge a \neq \frac{1}{2}$ 3) kontradiktoran: $\swarrow$

4. $\begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 52 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \end{bmatrix} = 4 \quad \begin{vmatrix} 1 & 9 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 7 & 9 \end{vmatrix} = 10 \quad \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$

5. Zaokružiti cifru (cifre) ispred uređenih n -torki koje su GENERATORNE u vektorskom prostoru uređenih parova $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$: ~~1~~ $((0, 1))$ 2 $((1, 2), (1, 1), (2, 3))$ ~~3~~ $((1, 0), (2, 0))$ 4 $((1, 0), (0, 2), (0, 0))$
~~5~~ $((1, 1), (2, 2))$ ~~6~~ $((0, 0), (0, 0), (3, 0))$ ~~7~~ $((0, 1), (0, 2))$ 8 $((1, 0), (0, 1), (0, 0), (1, 2))$

6. Ispod svake matrice napisati broj koji predstavlja njen rang.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad 0 \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \quad 2 \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad 2 \quad \begin{bmatrix} 0 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & -6 & 2 & -4 \end{bmatrix} \quad 1 \quad \begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad 2 \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

7. Matrice i rangovi linearnih transformacija $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x) = (x, 0)$ i $g, h, r, s, p: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$,
 $g(x, y, z) = (x + z, y)$, $h(x, y, z) = (x, x)$, $r(x, y, z) = (z, 0)$, $s(x, y, z) = (x - y - z, 0)$ i $p(x, y, z) = (z, z)$
 su: (Rang upisati ispod odgovarajuće matrice)

$$M_f = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad M_g = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad M_h = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad M_r = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad M_s = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad M_p = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

8. Neka je $ABCD$ paralelogram, gde mu je BD dijagonala, S presek dijagonala i P sredina od SC . U zavisnosti od $\vec{a} = \vec{AS}$ i $\vec{b} = \vec{AD}$ napisati vektore $\vec{BD} = 2(\vec{b} - \vec{a})$ i $\vec{BP} = \vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}$

9. Odrediti sve vrednosti realnog parametra a za koje je sistem linearnih jednačina

$$\begin{aligned} x + ay &= a \\ x + 2ay &= 2a \\ 2x + y &= 2 \end{aligned}$$

 1) kontradiktoran: $a \neq 0$
 2) određen: $a = 0$
 3) 1 puta neodređen: $\swarrow$
 4) 2 puta neodređen: $\swarrow$

10. Neka je $ABCD$ paralelogram, a tačke P i Q redom sredine duži AC i BC . (BD je dijagonala paralelograma). Izraziti vektor $\vec{BQ} + \vec{AQ}$ kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{a} = \vec{AC}$ i $\vec{b} = \vec{BD}$.

$$\vec{BQ} + \vec{AQ} = \vec{a}$$

11. Izraziti vektor $\vec{x} = (1, 0, -2)$ kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{a} = (1, 2, 1)$, $\vec{b} = (1, 1, -1)$ i $\vec{c} = (1, 1, 0)$:

$$\vec{x} = -\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$$

12. U vektorskom prostoru $(\mathbb{R}^5, \mathbb{R}, +, \cdot)$, četvorka vektora (a, b, c, d) je:

1) uvek zavisna 2) nikad baza 3) uvek nezavisna 4) nikad nezavisna 5) nikad generatorna

13. U vektorskom prostoru $(\mathbb{R}, \mathbb{R}, +, \cdot)$, vektor $a \neq 0$ je:

1) uvek nezavisan 2) uvek generatoran 3) uvek zavisna 4) uvek baza

14. Karakteristični polinom matrice $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ je $\lambda^2 - 5$, a karakteristični koreni su: $\{\sqrt{5}, -\sqrt{5}\}$

15. Koje od tvrđenja je tačno ako je kvadratna matrica B dobijena od matrice A elementarnim transformacijama. ~~1~~ $\det(A) = \det(B)$ 2 $\det(A) \neq 0 \Rightarrow \det(B) \neq 0$ ~~3~~ $\det(A) = 0 \Rightarrow \det(B) = 0$
4 $\text{Rang}(A) = \text{Rang}(B)$ 5 $\det A = \alpha \det B$ za neki skalar α 6 $\exists A^{-1} \Leftrightarrow \exists B^{-1}$

16. Neka su $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ slobodni vektori i $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ jedinični međusobno normalni. Tada je:

1 $(\vec{x}\vec{i})\vec{i} + (\vec{x}\vec{j})\vec{j} + (\vec{x}\vec{k})\vec{k} = \vec{x}$ 2 $(\vec{x}\vec{i}, \vec{x}\vec{j}, \vec{x}\vec{k}) \in \mathbb{R}^3$ 3 $(\vec{x}\vec{i})^2 + (\vec{x}\vec{j})^2 + (\vec{x}\vec{k})^2 = \vec{x}\vec{x}$
~~4~~ $(\vec{x}\vec{i})\vec{i} + (\vec{x}\vec{j})\vec{j} + (\vec{x}\vec{k})\vec{k} \in \mathbb{R}^3$ ~~5~~ $(\vec{x}\vec{i})\vec{i} + (\vec{x}\vec{j})\vec{j} + (\vec{x}\vec{k})\vec{k} = \vec{x}\vec{x}$

17. Neka je $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ uređena trojka nekolinearnih slobodnih vektora. Tada:

1 postoje takvi vektori $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ da je trojka $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ baza ~~2~~ trojka $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ nikada generatorna
~~3~~ trojka $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ uvek generatorna 4 postoje takvi vektori $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ da je trojka $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ zavisna

18. U vektorskom prostoru slobodnih vektora, par vektora (a, b) je: ~~1~~ može biti generatoran

2 uvek nezavisan 3 uvek zavisna 4 nekad nezavisan a nekad zavisna 5 nikada baza

19. Izračunati vektore položaja $\vec{r}_P$ i $\vec{r}_Q$ projekcija tačke $T(1, 2, 3)$, redom na pravu $x = y = z$ i ravan $x + y + z = 9$. $\vec{r}_P = (1, 1, 1)$ $\vec{r}_Q = (2, 1, 1)$

20. Koja od sledećih tvrdnji je tačna za svaka dva slobodna nenula vektora $\vec{x}$ i $\vec{a}$:

a $(\vec{a} - \text{pr}_{\vec{x}}\vec{a}) \perp \vec{x}$ b $(\vec{x} - \text{pr}_{\vec{a}}\vec{x}) \perp \vec{a}$ ~~c~~ $(\vec{a} - \text{pr}_{\vec{x}}\vec{a}) \parallel \vec{x}$ ~~d~~ $(\vec{x} - \text{pr}_{\vec{a}}\vec{x}) \parallel \vec{a}$ ~~e~~ ništa od prethodnog

27. Neka su a, b i c proizvoljni nezavisni vektori. Tada uređena trojka vektora $(a + b - c, b + c, a + 2b)$ je:
~~a) uvek zavisna~~ ~~b) uvek nezavisna~~ ~~c) nekad zavisna, a nekad nezavisna~~, zavisi od izbor vektora a, b, c .

28. Neka su a, b i c zavisni vektori. Tada uređena trojka vektora $(3a + 9c, 7a + 8b, 7a - 4b + 5c)$ je:
~~a) uvek zavisna~~ ~~b) uvek nezavisna~~ ~~c) nekad zavisna, a nekad nezavisna~~, zavisi od izbor vektora a, b, c .

29. Ako su $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$, $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$ i $\vec{c} = c_1\vec{i} + c_2\vec{j} + c_3\vec{k}$ **komplanarni** tada:

~~1) rang~~ $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} = 2$ **2) rang** $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \leq 3$ ~~3) rang~~ $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} = 3$

~~4) $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0$~~ ~~5) $\vec{a}(\vec{b} \times \vec{c}) \neq 0$~~ ~~6) $(\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}) \vec{a} = \alpha\vec{b} + \beta\vec{c}$~~

~~7) $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = 0 \Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 0$~~ **8) $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ je zavisna.**

30. Ako je $\vec{x} = x_1\vec{i} + x_2\vec{j} + x_3\vec{k}$ i $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definisana sa $f(x_1, x_2, x_3) = \vec{p} \cdot \vec{x}$ gde je $\vec{p}$ proizvoljan slobodni vektor, tada funkcija f **uvek** jeste:

1) linearna transformacija ~~2) injektivna~~ ~~3) surjektivna~~ ~~4) bijektivna~~ ~~5) izomorfizam~~

31. Neka je $\varphi: V \rightarrow \mathbb{R}^3$ definisana sa $\varphi(x_1\vec{i} + x_2\vec{j} + x_3\vec{k}) = (x_1 + x_2 + x_3, x_2 + x_3, x_3)$, gde su $(V, \mathbb{R}, +, \cdot)$ i $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}, +, \cdot)$ vektorski prostori slobodnih vektora i uređenih trojki. Da li je funkcija $\varphi: V \rightarrow \mathbb{R}^3$

1) linearna transformacija ~~2) injektivna~~ ~~3) surjektivna~~ ~~4) bijektivna~~ ~~5) izomorfizam~~

32. Neka je $\mathcal{M}$ skup svih kvadratnih matrica reda 1 čiji elementi su iz skupa realnih brojeva $\mathbb{R}$. Tada je:

1) $\det: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ ~~2) $\det: \mathcal{M} \xrightarrow{1-1} \mathbb{R}$~~ ~~3) $\det: \mathcal{M} \xrightarrow{na} \mathbb{R}$~~ ~~4) $\det: \mathcal{M} \xrightarrow{1-1}_{na} \mathbb{R}$~~ ~~5) $\det$ je linearna transformacija?~~

33. Neka je $\mathcal{M}$ skup svih matrica formata $(9, 2)$ čiji svi elementi su iz skupa realnih brojeva $\mathbb{R}$. Tada je:

~~1) rang: $\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$~~ ~~2) rang: $\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{N}$~~ ~~3) rang: $\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$~~ ~~4) rang: $\mathcal{M} \rightarrow \{0, 1, 2\}$~~
5) rang: $\mathcal{M} \xrightarrow{na} \{0, 1, 2\}$

34. Neka je $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ nezavisna u prostoru V , $(c_1, c_2, \dots, c_m)$ **generatrna** za prostor V i $\dim V = 4$. Tada je **1) $m \leq 4 \leq n$** ~~2) $n \leq 4 \leq m$~~ ~~3) $n \leq m \leq 4$~~ ~~4) $4 \leq m \leq n$~~ ~~5) $4 \leq n \leq m$~~ ~~6) $n \geq 4$~~

35. Neka je $\vec{r}_A$ vektor položaja tačke A , $|\vec{AB}| = 1$ i $|\vec{BC}| = 2$. Odrediti $\vec{r}_C$ u zavisnosti od $\vec{r}_A$, $\vec{i}$ i $\vec{j}$, ako je $\vec{AB} \parallel \vec{i}$, $\vec{BC} \parallel \vec{j}$ i vektori $\vec{AB}$ i $\vec{i}$ su suprotnog smera, a vektori $\vec{BC}$ i $\vec{j}$ istog. $\vec{r}_C = \vec{r}_A - \frac{\vec{i}}{|\vec{i}|} + 2\frac{\vec{j}}{|\vec{j}|}$

36. Linearne transformacije $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, i $G: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ su uvek oblika:

$f(x, y) = (x, y, x+y)$ $g(x, y) = x+y$ $h(x) = x$ $F(x, y, z) = (x, y)$ $G(x) = (x, x)$
 $x, y, z, x', y', z' \in \mathbb{R}!$

37. Linearne transformacije f i g definisane su sa $f(x_1, x_2) = (x_1 - 2x_2, 2x_1 - 4x_2)$ i $g(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, 2x_1 + 3x_2)$.

a) Po definiciji kompozicije $\circ$ odrediti $(f \circ g)(x_1, x_2) = f(g(x_1, x_2)) = (-x_1 - x_2, -x_1 - 6x_2)$

b) Napisati matrice M_f i M_g koje odgovaraju linearnim transformacijama f i g :

$M_f = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$, $M_g = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$.

c) Izračunati proizvod matrica $M_f \cdot M_g = \begin{bmatrix} -1 & -5 \\ -6 & -10 \end{bmatrix}$, $M_g^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$ i $g^{-1}(x_1, x_2) = (x_1 - x_2, 2x_1 - 3x_2)$

d) Napisati linearnu transformaciju $h(x_1, x_2)$ kojoj odgovara matrica $M_f \cdot M_g$ tj. $h(x_1, x_2) = (-x_1 - x_2, -x_1 - 6x_2)$

e) Da li je $h = f \circ g$ tj. da li je $(\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}) h(x_1, x_2) = (f \circ g)(x_1, x_2)$? **DA** NE

KOLOKVIJUM 2, PRIMER 16

1. Za ravan $\alpha: z = 1$ napisati jedan njen vektor normale $\vec{n}_\alpha = (0, 0, 1)$ i koordinate neke njene tri različite nekolinearne tačke $A(2, 3, 1)$, $B(1, 1, 1)$, $C(5, 1, 1)$.

1. Ako je $\vec{a} = (1, 0, 1)$ i $\vec{b} = (0, 2, 0)$, tada je
 $\vec{a}\vec{b} = 0$ $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{2}$ $\vec{a} \times \vec{b} = 2\sqrt{2}$
2. Za koje vrednosti parametra $a \in \mathbb{R}$ sistem jednačina $ax + y = 1 \wedge x + ay = a$ nad poljem realnih brojeva je:
 1) neodređen: $a = 1 \vee a = -1$ 2) određen: $a \neq 1 \wedge a \neq -1$ 3) kontradiktoran: ---
3. $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot [1 \ -1 \ 0] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} [1 \ -1 \ 0] \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = 0$ $\begin{bmatrix} 7 & -6 \\ 8 & -7 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & -6 \\ 8 & -7 \end{bmatrix}$
4. Zaokružiti cifru (cifre) ispred uređenih n -torki koje su GENERATORNE u vektorskom prostoru trojki $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$:
 1) $((0, 1, 0))$ 2) $((1, 2, 0), (1, 1, 0), (2, -1, 1))$ 3) $((1, 0, 0), (2, 0, 2))$
 4) $((1, 0, 0), (0, 2, 0), (0, 0, 3))$ 5) $((1, 1, 1), (2, 2, 2))$ 6) $((0, 0, 2), (0, 0, 0), (3, 0, 0))$
 7) $((0, 1, 0), (0, 2, 0))$ 8) $((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 2, 3))$
5. Ispod svake matrice napisati broj koji predstavlja njen rang.
 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ 3 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 2 $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 2 $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 2 $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ 1 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ 2 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 1 $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 0
6. Matrice i rangovi linearnih transformacija $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x) = (0, 9x)$ i $g, h, r, s: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$,
 $g(x, y, z) = (x + y, x + z)$, $h(x, y, z) = (x - y, 0)$, $r(x, y, z) = (0, y)$, $s(x, y, z) = (x - y - z, 6y)$ i $p(x, y, z) = (z, 0)$ su: (Rang upisati ispod odgovarajuće matrice)
 $M_f = \begin{bmatrix} 0 \\ 9 \end{bmatrix}$ 1 $M_g = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 2 $M_h = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 1 $M_r = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ 1 $M_s = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 6 & 6 \end{bmatrix}$ 2 $M_p = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 1
7. Neka je $ABCD$ paralelogram, gde mu je BD dijagonala, a S presek dijagonala. U zavisnosti od $\vec{r}_S, \vec{r}_B$ i $\vec{r}_A$ napisati vektore položaja tačaka C i D : $\vec{r}_C = 2\vec{r}_S - \vec{r}_A$ $\vec{r}_D = 2\vec{r}_S - \vec{r}_B$
8. Napisać vektore položaja $\vec{r}_P$ i $\vec{r}_{P''}$ projekcija tačke P na pravu $p(A, \vec{a})$ i ravni $\alpha(Q, \vec{n}_\alpha)$.
 $\vec{r}_P = \vec{r}_A + \frac{(\vec{r}_P - \vec{r}_A) \cdot \vec{a}}{\vec{a} \cdot \vec{a}} \vec{a}$ $\vec{r}_{P''} = \vec{r}_P + \frac{(\vec{r}_P - \vec{r}_P) \cdot \vec{n}_\alpha}{\vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\alpha} \vec{n}_\alpha$
9. Broj rešenja homogenog sistema linearnih jednačina nad poljem realnih brojeva može da bude:
 a) 0 b) 1 c) 2 d) ∞
10. Koji od sledeća tri vektora je karakteristični vektor za matricu $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
 a) $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$
11. Koji od sledeća tri polinoma je karakteristični polinom za matricu $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$
 a) $\lambda^2 + \lambda + 6$ b) $\lambda^2 + \lambda + 6$ c) $-\lambda + 7$
12. Koji od tvrdjenja je tačno za bilo koje matrice A, B, C i svaki skalar λ
 a) $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$ b) $\det(\lambda A) = \lambda \det(A)$ c) $\det(ABC) = \det(A)\det(B)\det(C)$
13. $\begin{vmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{vmatrix} = \dots$ a) $\cos 2\varphi$ b) 1 c) 0 d) $\sin 2\varphi$
14. Koje od tvrdjenja je tačno ako je matrica A' dobijena od matrice A elementarnim transformacijama.
 a) $\det(A) = 0 \Leftrightarrow \det(A') = 0$ b) $\det(A) = \det(A')$ c) $\det(A) = \lambda \det(A')$ za neki skalar $\lambda \neq 0$
15. Koje od tvrdjenja je tačno ako je A kvadratna matrica. red n ?
 a) $\det(A) = 0 \Rightarrow \text{Rang}(A) = 0$ b) $\det(A) = 0 \Leftrightarrow \text{Rang}(A) \leq n - 1$ c) $\det(A) = 0 \Rightarrow \text{Rang}(A) = n$
16. Matrica linearne transformacije $f(x, y) = (3x + y, y)$ je a) $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

18. Rang matrice $\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$ je a) 0 b) 1 c) 2 d) 3.

19. Odrediti tačke A_1, A_2, A_3, A_4 simetrične tački $A(1, 2, 3)$ redom u odnosu na ravni xOy, xOz, yOz i koordinatni početak. $A_1(1, 2, -3)$ $A_2(-1, 2, 3)$ $A_3(-1, 2, -3)$ $A_4(-1, -2, 3)$.

20. Koja od sledećih tvrdnji je tačna za svaka dva slobodna nenula vektora $\vec{x}$ i $\vec{a}$:

a) $(\vec{a} - \text{pr}_{\vec{x}} \vec{a}) \perp \vec{x}$ b) $(\vec{x} - \text{pr}_{\vec{a}} \vec{x}) \perp \vec{a}$ c) $(\vec{a} - \text{pr}_{\vec{x}} \vec{a}) \parallel \vec{x}$ d) $(\vec{x} - \text{pr}_{\vec{a}} \vec{x}) \parallel \vec{a}$ e) ništa od prethodnog

21. Ako je $(d_1, \dots, d_\ell)$ ne zavisna u prostoru V i $\dim V = k$, tada je:

1) $k \leq \ell$ 2) $\ell \leq k$ 3) $k = \ell$ 4) $\ell < k$ 5) $\ell > k$

22. Linearne transformacije f i g definisane su sa $f(x_1, x_2) = (x_1 - x_2, 2x_1 + x_2)$ i $g(x_1, x_2) = (x_1 - x_2, x_1 + x_2)$.

a) Po definiciji kompozicije o odrediti $(f \circ g)(x_1, x_2) = f(g(x_1, x_2)) = (-2x_1, 3x_1 - x_2)$

b) Napisati matrice M_f i M_g koje odgovaraju linearnim transformacijama f i g

$$M_f = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, M_g = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

c) Izračunati proizvod matrica $M_f \cdot M_g = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$, $M_g^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}$ i $g^{-1}(x_1, x_2) = (-\frac{1}{6}x_1 + \frac{1}{3}x_2, \frac{1}{3}x_1)$.

d) Napisati linearnu transformaciju $h(x_1, x_2)$ kojoj odgovara matrica $M_f \cdot M_g$ tj. $h(x_1, x_2) = (-2x_1, 3x_1 - x_2)$

e) Da li je $h = f \circ g$ tj. da li je $(\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}) h(x_1, x_2) = (f \circ g)(x_1, x_2)$? (DA) NE

23. Nesvodljiv polinom nad poljem kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$ može biti stepena $\in \{ 1 \}$.

24. Odrediti vrednosti parametara $a, b \in \mathbb{R}$ za koje je sistem

$$\begin{cases} x + by = 1 \\ bx - ay = b \end{cases}$$

a) kontradiktoran:

b) određen: $a \neq -b^2$

c) 1 puta neodređen: $a = -b^2$

d) 2 puta neodređen:

25. Ako su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ različiti nekolinearni vektori, tada je neorijentisani, konveksni ugao između vektora $\vec{m} = \vec{a} - \vec{b}$ i $\vec{n} = \frac{\vec{a}}{a} + \frac{\vec{b}}{b}$: 1) 0 2) $\frac{\pi}{6}$ 3) $\frac{\pi}{4}$ 4) $\frac{\pi}{3}$ 5) $\frac{\pi}{2}$ 6) π

26. Izračunati α i β ako je $\alpha(1, -3, 2) + \beta(3, 7, -3) = (0, 0, 0)$: $(\alpha, \beta) \in \{ (0, 0) \}$

27. Izračunati α i β ako je $\alpha(1, -3, 2) + \beta(2, -6, 4) = (0, 0, 0)$: $(\alpha, \beta) \in \{ \lambda(-2, 1) \mid \lambda \in \mathbb{R} \}$

28. Neka je $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ uređena trojka nekoplanarnih slobodnih vektora. Tada: 1) trojka $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ je uvek linearno nezavisna 2) trojka $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ je uvek linearno zavisna 3) postoji takav vektor $\vec{d}$ da je četvorka $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d})$ nezavisna 4) postoji takav vektor $\vec{d}$ da je četvorka $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d})$ zavisna 5) za svaki vektor $\vec{d}$ je četvorka $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d})$ nezavisna 6) za svaki vektor $\vec{d}$ je četvorka $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d})$ zavisna 7) svaki vektor $\vec{d}$ je linearna kombinacija uređene trojke vektora $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$

29. Neka su $\mathbf{a}_1 = (a_{11}, \dots, a_{1n})$, $\mathbf{a}_2 = (a_{21}, \dots, a_{2n})$, ..., $\mathbf{a}_n = (a_{n1}, \dots, a_{nn})$ vektori vrste matrice $A = A_{nn} = [a_{ij}]_{n \times n}$ i neka je $V = \text{Lin}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n) = \{ \alpha_1 \mathbf{a}_1 + \alpha_2 \mathbf{a}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{a}_n \mid \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \}$. Tada

1) $\det A \neq 0 \Leftrightarrow \text{rang } A < n$ 2) $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n)$ je zavisna akko $\det A = 0$ 3) $\dim V \neq 0 \Leftrightarrow \text{rang } A \geq 1$

4) $\det A \neq 0 \Leftrightarrow \dim V < n$ 5) $\det A \neq 0 \Leftrightarrow \text{rang } A \leq n$ 6) $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n)$ je zavisna akko $\text{rang } A < n$

30. U vektorskom prostoru svih slobodnih vektora, uređen par vektora (a, b) je:

1) uvek nezavisan, 2) uvek zavisna, 3) nekad nezavisan a nekad zavisna, 4) uvek generatoran.

31. Ako je uređena trojka vektora (a, b, c) zavisna, tada je uređena trojka vektora $(a + b, a + c, a + 2b - c)$

a) uvek nezavisna b) uvek zavisna c) nekada zavisna, a nekada nezavisna.

32. Neka je $ABCD$ paralelogram, a tačka T težište trougla BCD (BD je dijagonala paralelograma). Izraziti vektor $\vec{DT}$ kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{a} = \vec{AB}$ i $\vec{b} = \vec{BC}$. $\vec{DT} = \frac{2\vec{a}}{3} + \frac{\vec{b}}{3}$

33. Ako je $f: V \rightarrow W$ izomorfizam, tada je: 1) postoji f^{-1} 2) V i W su izomorfni 3) $V = W$

4) za svaku nezavisnu n -torku vektora $(v_1, \dots, v_n)$ iz V , n -torka $(f(v_1), \dots, f(v_n))$ je nezavisna u W

5) za svaku zavisnu n -torku vektora $(v_1, \dots, v_n)$ iz V , n -torka $(f(v_1), \dots, f(v_n))$ je zavisna u W

KOLOKVIJUM 2, PRIMER 17

1. Neka je prava p data presekom ravni $x + y = 0$ i $y - z = 0$. Napisati bar jedan vektor $\vec{p} = (-1, 1, 1)$ paralelan sa pravom p i jedan vektor $\vec{m} = (1, 1, 0)$ normalan na pravu p .

2. Za koje vrednosti parametra $a \in \mathbb{R}$ sistem linearnih jednačina $x + ay = 1 \wedge ax - y = 1$ nad poljem realnih brojeva je: 1) neodređen: 2) određen: $a \in \mathbb{R}$ 3) kontradiktoran:

3. Za vektore $\vec{a} = (0, -1, 1)$ i $\vec{b} = (0, 1, 0)$ izračunati: 1) $|\vec{a}| = \sqrt{2}$ 2) $|\vec{b}| = 1$
3) $3\vec{a} - 2\vec{b} = (0, -5, 3)$ 4) $\vec{a} \cdot \vec{b} = -1$
5) $|\vec{a} \times \vec{b}| = 1$ 6) $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{3\pi}{4}$

4. Koje od sledećih uređenih n -torki su zavisne za vektorski prostor $\mathbb{R}^3$: 1) $((0, 0, -1), (0, 4, 0), (9, 0, 0))$
2) $((1, 3, -2), (-2, -6, 4))$ 3) $((0, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 0), (1, 2, 3))$ 4) $((1, 0, 1), (1, 1, 0), (2, 1, 1))$

5. $\begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$ $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$ $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

6. Matrice linearnih transformacija $f(x, y) = x + 2y$, $g(x, y, z) = (y, z)$, $h(x, y) = (x, y, y)$ i $s(x, y, z) = (0, 0, x + x)$ su:

$$M_f = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$M_g = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_h = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_s = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

7. Ispod svake matrice napisati broj koji predstavlja njen rang.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 5 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 7 & 9 \\ -9 & -2 & 6 \end{bmatrix}$$

8. Odrediti sve vrednosti realnog parametra a za koje je sistem linearnih jednačina 1) kontradiktoran: 2) određen: $a \neq 0$
 $ax + ay = a$ 3) jednostruko neodređen: 4) dvostruko neodređen: $a = 0$
 $-ax + ay = a$

9. Neka je $ABCD$ paralelogram, a tačke P i Q redom sredine duži BC i CD . (BD je dijagonala paralelograma). Izraziti vektor $\vec{PQ}$ kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{a} = \vec{AB}$ i $\vec{b} = \vec{BC}$.

$$\vec{PQ} = \frac{\vec{b} - \vec{a}}{2}$$

10. Napisati $\vec{x} = (0, 0, 1)$ kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{a} = (1, 0, 1)$, $\vec{b} = (2, 1, 1)$ i $\vec{c} = (1, 1, 1)$:

$$\vec{x} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$$

11. Koordinate projekcija A' tačke $A(1, 1, 4)$ na ravan određenu sa $x + y + z = 0$ je: $A'(-1, -1, 2)$

12. Vektor položaja $\vec{r}_T$ tačke prodora prave $p: \vec{r} = \vec{r}_s + t\vec{l}$ kroz ravan $\alpha: \vec{a}\vec{r} = \vec{a}\vec{r}_D$ je

$$\vec{r}_T = \vec{r}_s + \frac{(\vec{a} \cdot \vec{r}_s - \vec{a} \cdot \vec{r}_D)}{\vec{a} \cdot \vec{l}} \vec{l}$$

13. Normalna projekcija vektora $\vec{x} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$ na ravan $\alpha: 2x - y + z = 0$ je:

$$\text{pr}_\alpha(\vec{x}) = \left(0, \frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$$

14. Koji od vektora su karakteristični vektori za matricu $\begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$? a) $\begin{bmatrix} -3 \\ -3 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$

15. Koje od tvrdjenja je tačno za bilo koje kvadratne matrice A, B, C reda 2 i svaki skalar λ :

$$1) \det(A + B) = \det(A) + \det(B) \quad 2) \det(\lambda A) = \lambda^3 \det(A) \quad 3) \det(AB) = \det(A) \det(B)$$

$$4) \text{rang}(A + B) = \text{rang}(A) + \text{rang}(B) \quad 5) \text{rang}(AB) = \text{rang}(A) \text{rang}(B) \quad 6) A(BC) = (AB)C$$

$$7) A(B + C) = AB + AC \quad 8) AB = BA \quad 9) A + B = B + A$$

16. ● Koja od sledećih tvrdnji je tačna za svaka dva slobodna nenula vektora $\vec{x}$ i $\vec{a}$:
 ① $(\vec{a} - \text{pr}_{\vec{x}}\vec{a})\vec{x} = 0$ ② $(\vec{x} - \text{pr}_{\vec{a}}\vec{x})\vec{a} = 0$ ③ $(\vec{a} - \text{pr}_{\vec{x}}\vec{a}) \times \vec{x} \neq 0$ ④ $(\vec{x} - \text{pr}_{\vec{a}}\vec{x}) \times \vec{a} = 0$ ⑤ ništa od prethodnog
17. ● Neka su a, b i c nezavisni vektori. Tada uređena trojka vektora $(a+b, b+c, c)$ je:
 ① uvek zavisna ② uvek nezavisna ③ nekad zavisna, a nekad nezavisna, zavisi od izbor vektora a, b, c .
18. ● Neka su a, b i c zavisni vektori. Tada uređena trojka vektora $(3a+5c, 7a+9b, 6a-5b-8c)$ je:
 ① uvek zavisna ② uvek nezavisna ③ nekad zavisna, a nekad nezavisna, zavisi od izbor vektora a, b, c .
19. ● Nenula vektori $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ i $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$ su **nekolinearni** ako je ① $\vec{a} \times \vec{b} = 0$ ② $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$
 ③ $\text{rang} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} = 1$ ④ $\text{rang} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} \leq 2$ ⑤ $\text{rang} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} \leq 1$ ⑥ $\vec{a}$ i $\vec{b}$ su zavisni
 ⑦ $(\exists \lambda \in \mathbb{R}) \vec{a} = \lambda \vec{b}$ ⑧ $\vec{a} \nparallel \vec{b}$ ⑨ $(\forall \lambda \in \mathbb{R}) (\vec{a} \neq \lambda \vec{b} \wedge \lambda \vec{a} \neq \vec{b})$ ⑩ $(\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}) \alpha \vec{a} + \beta \vec{b} = 0 \Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 = 0$
20. ● Ako su vektori $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$, $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$ i $\vec{c} = c_1\vec{i} + c_2\vec{j} + c_3\vec{k}$ **komplanarni** tada je:
 ① $\text{rang} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \leq 2$ ② $\text{rang} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \leq 3$ ③ $\text{rang} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} = 3$
 ④ $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0$ ⑤ $\vec{a}(\vec{b} \times \vec{c}) \neq 0$ ⑥ $(\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}) \vec{a} = \alpha \vec{b} + \beta \vec{c}$
 ⑦ $\alpha \vec{a} + \beta \vec{b} + \gamma \vec{c} = 0 \Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \neq 0$ ⑧ $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ je nezavisna.
21. ● Neka je $\varphi: V \rightarrow \mathbb{R}^3$ definisana sa $\varphi(x_1\vec{i} + x_2\vec{j} + x_3\vec{k}) = (x_3, x_2 + x_3, x_1 + x_2 + x_3)$ gde su $(V, \mathbb{R}, +, \cdot)$ i $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}, +, \cdot)$ vektorski prostori slobodnih vektora i uređenih trojki. Da li je funkcija $\varphi: V \rightarrow \mathbb{R}^3$
 ① linearna transformacija ② injektivna ③ surjektivna ④ bijektivna ⑤ izomorfizam
22. ● Neka je $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ generatorna u prostoru V , $(c_1, c_2, \dots, c_n)$ nezavisna za prostor V i $\dim V = m$. Tada je ① $m \leq k \leq n$ ② $n \leq k \leq m$ ③ $m \leq k$ ④ $k \leq m \leq n$ ⑤ $k \leq n \leq m$ ⑥ $n \leq m \leq k$
23. ● Neka je $\vec{r}_A$ vektor položaja tačke $A(1, 1, 1)$, $|\vec{AB}| = |\vec{BC}| = 18$. Odrediti $\vec{r}_C$ ako je $\vec{AB} \parallel \vec{a} = (1, 4, 8)$, $\vec{BC} \parallel \vec{b} = (-8, 1, 4)$ i ako su smerovi vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ suprotni smerovima redom vektora $\vec{AB}$ i $\vec{BC}$.
 $\vec{r}_C = (1, 1, 1) - (2, 8, 16) - (-16, 1, 4) = (15, -3, -13)$
24. ● Ako je A kvadratna matrica reda 7, tada je: ① $\det A = 0 \Leftarrow \text{rang } A = 0$ ② $\det A = 0 \Leftrightarrow \text{rang } A \leq 6$
 ③ $\det A = 0 \Rightarrow \text{rang } A = 7$ ④ $\text{rang } A = 7 \Rightarrow \det A \neq 0$ ⑤ $\text{rang } A = 7 \Leftarrow \det A \neq 0$
 ⑥ $\text{rang } A = 7 \Leftarrow \exists A^{-1}$
25. ● Postoji linearna transformacija $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ za koju važi da je: ① surjektivna ② injektivna ③ bijektivna ④ izomorfizam ⑤ ništa od prethodnog
26. ● Napisati bar jednu, ukoliko postoji, linearnu transformaciju $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ za koju važi da:
 1) je injektivna $f(x) = (x, x)$ 2) nije injektivna $f(x) = (0, 0)$ 3) nije surjektivna $f(x) = (0, 0)$
27. ● Napisati bar jednu, ukoliko postoji, linearnu transformaciju $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ za koju važi da:
 1) je injektivna $f(x, y) = (x, y, 0)$ 2) nije injektivna $f(x, y) = (0, 0, 0)$
 3) je surjektivna $f(x, y) = (x, y, 0)$ 4) nije surjektivna $f(x, y) = (0, 0, 0)$
28. ● Napisati bar jednu, ukoliko postoji, linearnu transformaciju $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ za koju važi da:
 1) je injektivna $f(x, y, z) = (x, y)$ 2) nije injektivna $f(x, y, z) = (0, 0)$
 3) je surjektivna $f(x, y, z) = (x, y)$ 4) nije surjektivna $f(x, y, z) = (0, 0)$
29. ● Neka je M skup svih matrica formata $(8, 3)$ čiji elementi su iz skupa realnih brojeva $\mathbb{R}$. Tada funkcija rang je: ① $\text{rang}: M \rightarrow \mathbb{R}$ ② $\text{rang}: M \rightarrow \mathbb{N}$ ③ $\text{rang}: M \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$ ④ $\text{rang}: M \xrightarrow{na} \mathbb{N} \cup \{0\}$
 ⑤ $\text{rang}: M \xrightarrow{na} \{0, 1, 2, 3\}$
30. ● Zaokružiti one skupove $V \subseteq \mathbb{R}^3$ za koje važi $(1, 0, 2) \in V$: ① $V = \text{Lin}(\{(2, 0, 4)\})$
 ② $V = \text{Lin}(\{(-8, 10, 4), (4, -5, -2)\})$ ③ $V = \text{Lin}(\{(-8, 10, 4), (4, -5, -2), (0, 0, 0)\})$
 ④ $V = \text{Lin}(\{(0, -1, 1), (1, 1, 1)\})$ ⑤ $V = \text{Lin}(\{(0, 0, 0)\})$ ⑥ $V = \text{Lin}(\{(2, 0, 3), (4, 0, 5)\})$
 ⑦ $V = \text{Lin}(\{(1, 0, 0), (0, 2, 0), (0, 0, 3)\})$

37. Ⓞ Koji od sledećih podskupova $U \subseteq \mathbb{R}^3$ je potprostor i za one koji jesu napiši desno od njih njihovu dimenziju:

① $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = 0\}$, $\dim U = 2$

② $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + x^2 = 0\}$ $\dim U = 2$

③ $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \cdot 0 = 0\}$ $\dim U = 3$

④ $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = z + 0\}$ $\dim U = 2$

37. Ⓞ Neka su $\vec{x}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ slobodni vektori i $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ jedinični međusobno normalni i α, β i γ uglovi koje vektor $\vec{x}$ obrazuje sa redom vektorima $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. Tada je: ① $(\vec{x}|\vec{i})\vec{i} + (\vec{x}|\vec{j})\vec{j} + (\vec{x}|\vec{k})\vec{k} = \vec{x}$ ② $(\vec{x}|\vec{i}, \vec{x}|\vec{j}, \vec{x}|\vec{k}) \in \mathbb{R}^3$
 ③ $(\vec{x}|\vec{i})^2 + (\vec{x}|\vec{j})^2 + (\vec{x}|\vec{k})^2 = \vec{x}|\vec{x}$ ④ $(\vec{x}|\vec{i})\vec{i} + (\vec{x}|\vec{j})\vec{j} + (\vec{x}|\vec{k})\vec{k} \in \mathbb{R}^3$ ⑤ $(\vec{x}|\vec{i})\vec{i} + (\vec{x}|\vec{j})\vec{j} + (\vec{x}|\vec{k})\vec{k} = \vec{x}$
 ⑥ $(|\vec{x}| \cos \alpha)\vec{i} + (|\vec{x}| \cos \beta)\vec{j} + (|\vec{x}| \cos \gamma)\vec{k} = \vec{x}$ ⑦ $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$

KOLOKVIJUM 2, PRIMER 18

1. Ⓞ Za pravu $a: x = y = z$ napisati jedan njen vektor $\vec{a} = (1, 1, 1) \parallel a$ i koordinate jedne njene tačke $A(0, 0, 0)$

2. Ⓞ Za koje vrednosti parametra $a \in \mathbb{R}$ sistem linearnih jednačina $x + y = 1 \wedge x + ay = a$ nad poljem realnih brojeva je: 1) neodređen: $a = 1$ 2) određen: $a \neq 1$ 3) kontradiktoran: $\checkmark$

3. Ⓞ Za vektore $\vec{a} = (2, 1, 2)$ i $\vec{b} = (1, 1, 0)$ izračunati: 1) $|\vec{a}| = 3$ 2) $|\vec{b}| = \sqrt{2}$
 3) $\vec{a} - 2\vec{b} = (0, -1, 2)$ 4) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3$ 5) $\vec{a} \times \vec{b} = (-2, 0, 1)$ 6) $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{4}$

4. Ⓞ Koje od sledećih uređenih n -torki su nezavisne za vektorskog prostora $\mathbb{R}^3$: ① $((0, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 0))$
 ② $((1, 0, 0), (0, -1, 0))$ ③ $((0, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 0), (1, 2, 3))$ ④ $((1, 1, 1), (2, 2, 2), (3, 3, 3))$

5. Ⓞ $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = -3$ $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2$ $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$

6. Ⓞ Matrice linearnih transformacija $h(x) = 5x$, $f(x, y) = x$, $g(x, y, z) = y$ i $s(x, y) = (x + y, x + y)$ su:
 $M_h = [5]$ $M_f = [1 \ 0]$ $M_g = [0 \ 1 \ 0]$ $M_s = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

7. Ⓞ Ispod svake matrice napisati broj koji predstavlja njen rang.

$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -4 & 2 & -2 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 8 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$
 2 2 1 0 2 2 1

8. Ⓞ Ako je $ABCD$ paralelogram, S presek dijagonala AC i BD , T težište trougla SCD i ako je $\vec{AB} = \vec{a}$ i $\vec{BC} = \vec{b}$, tada je: ① $\vec{BT} = -\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$ ② $\vec{BT} = -\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{4}{5}\vec{b}$ ③ $\vec{BT} = -\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{5}{6}\vec{b}$ ④ $\vec{BT} = -\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b}$
 ⑤ $\vec{BT} = -\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{5}{6}\vec{b}$

9. Ⓞ Ako je $\vec{x} = (5, 4, 3)$, $\vec{a} = (1, 0, 1)$, $\vec{b} = (0, 1, 1)$, $\vec{c} = (1, 1, 0)$ i $\vec{x} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$, tada (α, β, γ) je: ① $(3, 2, 1)$
 ② $(2, 3, 1)$ ③ $(3, 1, 2)$ ④ $(1, 2, 3)$ ⑤ $(1, 3, 2)$ ⑥ $(2, -1, 3)$ ⑦ $(2, 2, 3)$ ⑧ $(2, 1, 3)$ ⑨ $(2, 3, 3)$ ⑩ $(1, 1, 3)$

10. • Neka je tačka P presek ravni $\alpha: \vec{n}\vec{r} = \vec{n}\vec{r}_Q$ i prave $a: \vec{r} = \vec{r}_A + t\vec{a}$ i $\vec{n}\vec{a} \neq 0$. Tada je:

① $\vec{r}_P = \vec{r}_A + \frac{(\vec{r}_Q - \vec{r}_A)\vec{n}}{\vec{a}\vec{n}}\vec{a}$ ② $\vec{r}_P = \vec{r}_Q + \frac{(\vec{r}_A - \vec{r}_Q)\vec{n}}{\vec{a}\vec{n}}\vec{a}$ ③ $\vec{r}_P = \vec{r}_A + \frac{(\vec{r}_Q - \vec{r}_A)\vec{n}}{\vec{n}\vec{a}}\vec{a}$
 ④ $\vec{r}_P = \vec{r}_A - \frac{(\vec{r}_A - \vec{r}_Q)\vec{n}}{\vec{a}\vec{n}}\vec{a}$ ⑤ $\vec{r}_P = \vec{r}_A + \frac{(\vec{r}_Q - \vec{r}_A)\vec{n}}{\vec{a}\vec{n}}\vec{n}$

11. Ⓞ Neka su a, b i c zavisni vektori. Tada uređena trojka vektora $(a + b, a + c, b + c)$ je:

① uvek zavisna ② uvek nezavisna ③ zavisna ili nezavisna, tj. zavisi od izbora vektora a, b, c .

12. Ⓞ Neka su a, b i c nezavisni vektori. Tada uređena trojka vektora $(a + b, a + c, -a + 2b - 2c)$ je:

① uvek zavisna ② uvek nezavisna ③ zavisna ili nezavisna, tj. zavisi od izbora vektora a, b, c .

13. 6. Za prave $m: \frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+1}{5}$ i $n: \frac{x-5}{-6} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-5}{-10}$ važi: a) mimoilazne su ($m \cap n = \emptyset \wedge m \nparallel n$)
b) paralelne su i različite ($m \parallel n \wedge m \neq n$) c) poklapaju se ($m = n$) d) seku se ($m \cap n = \{M\}$)

14. 6. $\vec{a} \perp \vec{b}$ ako i samo ako: 1) $\vec{a} \times \vec{b} = 0$ 2) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ 3) $\vec{a} \times \vec{b} \neq 0$ 4) $\vec{a}(\vec{b} \times \vec{c}) = 0$ 5) $\vec{a} = 0$ 6) $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|$.

15. 6. Broj svih linearnih transformacija $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ za koje važi $f(xy) = f(x)f(y)$ je: a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4 f) 5

16. 6. Neka su matrice $A = [a_{ij}]_{nn}$ i $B = [b_{ij}]_{nn}$ nad poljem $\mathbb{R}$. Tada postoji $\lambda \in \mathbb{R}$ takav da je:
1) $\text{rang}(A) = \text{rang}(B) \Rightarrow |\det(A)| = \lambda |\det(B)|$ 2) $\text{rang}(A) = \text{rang}(B) \Rightarrow \det(A) = \lambda \det(B)$
3) $|\det(A)| = \lambda |\det(B)| \Rightarrow \text{rang}(A) = \text{rang}(B)$ 4) $\det(A) = \lambda \det(B) \Rightarrow \text{rang}(A) = \text{rang}(B)$

17. 6. Par $(\vec{a}, \vec{b})$ je kolinearan ako je on par: 1) nenula vektora 2) različitih vektora 3) neparalelnih vektora
4) vektora istoga pravca 5) za koji je $\vec{a} \times \vec{b} = 0$ 6) za koji je $\vec{a}\vec{b} = 0$ 7) za koji je $\vec{a} = 0$ 8) zavisnih vektora

18. 6. Trojka slobodnih vektora $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ je komplanarna ako je ona trojka: (nije ekvivalencija!) 1) nenula vektora 2) različitih vektora 3) paralelnih vektora 4) vektora istoga pravca 5) za koju je $\vec{a}(\vec{b} \times \vec{c}) = 0$ 6) za koju je $\vec{a} \times \vec{b} = 0$ 7) zavisnih vektora 8) vektora čiji pravci su paralelni istoj ravni

19. 6. Zaokružiti brojeve ispred podskupova $U_i \subseteq \mathbb{R}^3$ koji su podprostori i brojeve koji su njihova dimenzija.
1) $U_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y\}$ 2) $U_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = -y\}$
3) $U_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 - y^2 = 0\}$ 4) $U_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = z\}$
5) $U_5 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 0\}$
dim U_1 je: 0 1 2 dim U_2 je: 0 1 2 dim U_4 je: 0 1 2 dim U_5 je: 0 1 2

20. 6. Neka je $a = (2, 2, 0)$, $b = (-3, 3, 0)$, $c = (1, -1, 0)$, $d = (-1, 1, 0)$, $e = (0, 0, 1)$, $f = (1, 0, 0)$, $g = (1, 2, 0)$.
Zaokružiti broj koji je dimenzija potprostora V vektorskog prostora $\mathbb{R}^3$:
1) $V = L(b, c, d) \Rightarrow \dim(V)$ je: 1, 2, 3 2) $V = L(e, f, g) \Rightarrow \dim(V)$ je: 1, 2, 3
3) $V = L(a, b) \Rightarrow \dim(V)$ je: 1, 2, 3 4) $V = L(e, f, g) \Rightarrow \dim(V)$ je: 1, 2, 3
5) $V = L(b, c, e) \Rightarrow \dim(V)$ je: 1, 2, 3 6) $V = L(a, b, c) \Rightarrow \dim(V)$ je: 1, 2, 3
7) $V = L(a, g) \Rightarrow \dim(V)$ je: 1, 2, 3

21. 6. Ako je A kvadratna matrica reda 3, tada je: 1) $\text{rang } A = 3 \Leftrightarrow \det A \neq 0$, 2) $\det A = 0 \Rightarrow \text{rang } A = 0$
3) $\det A = 0 \Leftrightarrow \text{rang } A \leq 2$, 4) $\det A = 0 \Rightarrow \text{rang } A = 3$ 5) $\text{rang } A = 3 \Rightarrow \det A \neq 0$, 6) $\text{rang } A = 3 \Leftrightarrow \exists A^{-1}$

22. 6. Koje od tvrdjenja je tačno za bilo koje kvadratne matrice A, B, C reda 2 i svaki skalar λ :
1) $A(BC) = (AB)C$ 2) $(B+C)A = BA + CA$ 3) $(AB)^2 = A^2B^2$ 4) $A - B = B - A$
5) $\det(AB) = \det(B)\det(A)$ 6) $\text{rang}(AB) = \text{rang}(A)\text{rang}(B)$ 7) $\det(A \cdot B) = \det(A) + \det(B)$
8) $\det(\lambda A) = \lambda \det(A)$

23. 6. Ako su vektori $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ i $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$ kolinearni tada je: 1) $\vec{a} \times \vec{b} = 0$ 2) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$
3) $\text{rang} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} = 1$ 4) $\text{rang} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} \leq 2$ 5) $\text{rang} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} \leq 1$ 6) $\vec{a}$ i $\vec{b}$ su zavisni
7) $(\exists \lambda \in \mathbb{R}) \vec{a} = \lambda \vec{b}$ 8) $\vec{a} \nparallel \vec{b}$ 9) $(\forall \lambda \in \mathbb{R}) (\vec{a} \neq \lambda \vec{b} \wedge \lambda \vec{a} \neq \vec{b})$ 10) $(\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}) \alpha \vec{a} + \beta \vec{b} = 0 \Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 = 0$

24. 6. Vektori $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$, $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$ i $\vec{c} = c_1\vec{i} + c_2\vec{j} + c_3\vec{k}$ su nekomplanarni ako je:

1) $\text{rang} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \leq 2$ 2) $\text{rang} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \leq 3$ 3) $\text{rang} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} = 3$

4) $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0$ 5) $\vec{a}(\vec{b} \times \vec{c}) \neq 0$ 6) $(\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}) \vec{a} = \alpha \vec{b} + \beta \vec{c}$

7) $\alpha \vec{a} + \beta \vec{b} + \gamma \vec{c} = 0 \Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \neq 0$ 8) $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ je nezavisna.

25. 6. Linearne transformacije f i g definisane su sa $f(x_1, x_2) = (x_1 - x_2, 2x_1 + x_2)$ i $g(x_1, x_2) = (x_1 - x_2, x_1 + x_2)$.

a) Po definiciji kompozicije o odrediti $(f \circ g)(x_1, x_2) = f(g(x_1, x_2)) = (-2x_1, 3x_1 - x_2)$

b) Napisati matrice M_f i M_g koje odgovaraju linearnim transformacijama f i g

$$M_f = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, M_g = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- c) Izračunati proizvod matrica $M_f \cdot M_g = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$, $M_g^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$ i $g^{-1}(x_1, x_2) = (\frac{1}{2}x_1, \frac{1}{3}x_2, -\frac{1}{2}x_1)$
d) Napisati linearnu transformaciju $h(x_1, x_2)$ kojoj odgovara matrica $M_f \cdot M_g$ tj. $h(x_1, x_2) = (-2x_2, 3x_1 - x_2)$
e) Da li je $h = f \circ g$ tj. da li je $(\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}) h(x_1, x_2) = (f \circ g)(x_1, x_2)$? **DA** NE

6. Neka je $\mathcal{M}$ skup svih kvadratnih matrica čiji svi elementi su iz skupa realnih brojeva $\mathbb{R}$. Tada je:

- 1) $\det : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ 2) $\det : \mathcal{M} \xrightarrow{1-1} \mathbb{R}$ 3) $\det : \mathcal{M} \xrightarrow{na} \mathbb{R}$ 4) $\det : \mathcal{M} \xrightarrow{1-1} \mathbb{R}$ 5) $\det$ je linearna

7. Neka je $\mathcal{M}$ skup svih matrica formata $(5, 2)$ čiji svi elementi su iz skupa realnih brojeva $\mathbb{R}$. Tada je:

- 1) $\text{rang} : \mathcal{M} \xrightarrow{na} \{0, 1, 2\}$ 2) $\text{rang} : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ 3) $\text{rang} : \mathcal{M} \xrightarrow{na} \mathbb{N} \cup \{0\}$ 4) $\text{rang} : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$
5) $\text{rang} : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{N}$

8. Neka je $(a_1, a_2, \dots, a_m)$ nezavisna u prostoru V , $(c_1, c_2, \dots, c_k)$ generatorna za prostor V i $\dim V = n$. Tada je 1) $m \leq n$ 2) $n \leq k \leq m$ 3) $m \leq k$ 4) $k \leq m \leq n$ 5) $k \leq n \leq m$ 6) $m \leq n \leq k$

9. Napisati bar jednu, ukoliko postoji, linearnu transformaciju $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ za koju važi da:

- 1) je injektivna $f(x, y, z) = (2x, 2y)$ 2) nije injektivna $f(x, y, z) = (2x, 2y)$
3) je surjektivna $f(x, y, z) = (2x, 2y)$ 4) nije surjektivna $f(x, y, z) = (2x, 2y)$

KOLOKVIJUM 2, PRIMER 19

1. Za ravan $\alpha : z = 1$ napisati jedan njen vektor normale $\vec{n}_\alpha = (0, 0, 1)$ i koordinate neke njene tri različite nekolinearne tačke $A(1, 1, 1)$, $B(1, 1, 1)$, $C(1, 5, 1)$.

2. Ako je $\vec{a} = (1, 0, 1)$ i $\vec{b} = (0, 2, 0)$, tada je

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \quad \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

3. Za koje vrednosti parametra $a \in \mathbb{R}$ sistem jednačina $ax + y = 1 \wedge x + ay = a$ nad poljem realnih brojeva je: 1) neodređen: $a \neq 1$ 2) određen: $a \neq 1$ 3) kontradiktoran: $a = 1$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = 0 \quad \begin{bmatrix} 7 & -6 \\ 8 & -7 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & -6 \\ 8 & -7 \end{bmatrix}$$

5. Zaokružiti cifru (cifre) ispred uređenih n -torki koje su GENERATORNE u vektorkom prostoru trojki $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$: 1) $((0, 1, 0))$ 2) $((1, 2, 0), (1, 1, 0), (2, -1, 1))$ 3) $((1, 0, 0), (2, 0, 2))$
4) $((1, 0, 0), (0, 2, 0), (0, 0, 3))$ 5) $((1, 1, 1), (2, 2, 2))$ 6) $((0, 0, 2), (0, 0, 0), (3, 0, 0))$
7) $((0, 1, 0), (0, 2, 0))$ 8) $((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 2, 3))$

6. Ispod svake matrice napisati broj koji predstavlja njen rang.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

7. Matrice i rangovi linearnih transformacija $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x) = (0, 9x)$ i $g, h, r, s : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $g(x, y, z) = (x + y, x + z)$, $h(x, y, z) = (x - y, 0)$, $r(x, y, z) = (0, y)$, $s(x, y, z) = (x - y - z, 6y)$ i $p(x, y, z) = (z, 0)$ su: (Rang upisati ispod odgovarajuće matrice)

$$M_f = \begin{bmatrix} 0 \\ 9 \end{bmatrix} \quad M_g = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad M_h = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad M_r = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad M_s = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 6 & 6 \end{bmatrix} \quad M_p = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

8. Neka je $ABCD$ paralelogram, gde mu je BD dijagonala, a S presek dijagonala. U zavisnosti od $\vec{r}_S, \vec{r}_B$ i $\vec{r}_A$ napisati vektore položaja tačaka C i D :

$$\vec{r}_C = 2\vec{r}_S - \vec{r}_A \quad \vec{r}_D = 2\vec{r}_S - \vec{r}_B$$

9. ⓐ Odrediti vrednosti parametara $a, b \in \mathbb{R}$ za koje je sistem $\begin{cases} x + by = 1 \\ bx - ay = b \end{cases}$ (a) kontradiktoran:
(b) određen: $a \neq -b^2$
(c) 1 puta neodređen: $a = -b^2$
(d) 2 puta neodređen:

10. ⓐ Ako su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ različiti nekolinearni vektori, tada je neorijentisani, konveksni ugao između vektora $\vec{m} = \vec{a}\vec{b} - \vec{b}\vec{a}$ i $\vec{n} = \frac{\vec{a}}{a} + \frac{\vec{b}}{b}$: 1) 0 2) $\frac{\pi}{6}$ 3) $\frac{\pi}{4}$ 4) $\frac{\pi}{3}$ 5) $\frac{\pi}{2}$ 6) π

11. ⓐ Izračunati vektore položaja $\vec{r}_{T'}$ i $\vec{r}_{T''}$ projekcija tačke $T(-1, 1, -1)$ na pravu $a: \vec{r} = (-1, 0, -2) + t(1, -1, 1)$, $t \in \mathbb{R}$ i ravan $\alpha: (1, -1, 0) \cdot \vec{r} = (1, -1, 0) \cdot (1, 0, 0)$.

$$\vec{r}_{T'} = (-1, 0, -1) \quad \vec{r}_{T''} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -1\right)$$

12. ⓐ Izračunati α i β ako je $\alpha(1, -3, 2) + \beta(3, 7, -3) = (0, 0, 0)$: $(\alpha, \beta) \in \{ (0, 0) \}$

13. ⓐ Izračunati α i β ako je $\alpha(1, -3, 2) + \beta(2, -6, 4) = (0, 0, 0)$: $(\alpha, \beta) \in \{ (2, 2, 2) \mid t \in \mathbb{R} \}$

14. ⓐ Neka je $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ uređena trojka nekoplanarnih slobodnih vektora. Tada: 1) trojka $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ je uvek linearno nezavisna 2) trojka $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ je uvek linearno zavisna 3) postoji takav vektor $\vec{d}$ da je četvorka $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d})$ nezavisna 4) postoji takav vektor $\vec{d}$ da je četvorka $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d})$ zavisna 5) za svaki vektor $\vec{d}$ je četvorka $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d})$ nezavisna 6) za svaki vektor $\vec{d}$ je četvorka $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d})$ zavisna 7) svaki vektor $\vec{d}$ je linearna kombinacija uređene trojke vektora $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$

15. ⓐ Neka su $\mathbf{a}_1 = (a_{11}, \dots, a_{1n})$, $\mathbf{a}_2 = (a_{21}, \dots, a_{2n})$, $\dots$, $\mathbf{a}_n = (a_{n1}, \dots, a_{nn})$ vektori vrste matrice $A = A_{nn} = [a_{ij}]_{nn}$ i neka je $V = \text{Lin}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n) = \{ \alpha_1 \mathbf{a}_1 + \alpha_2 \mathbf{a}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{a}_n \mid \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \}$. Tada 1) $\det A \neq 0 \Leftrightarrow \text{rang } A < n$ 2) $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n)$ je zavisna akko $\det A = 0$ 3) $\dim V \neq 0 \Leftrightarrow \text{rang } A \geq 1$ 4) $\det A \neq 0 \Leftrightarrow \dim V < n$ 5) $\det A \neq 0 \Leftrightarrow \text{rang } A \leq n$ 6) $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n)$ je zavisna akko $\text{rang } A < n$

16. ⓐ U vektorskom prostoru svih slobodnih vektora, uređen par vektora (a, b) je: 1) uvek nezavisan, 2) uvek zavisna, 3) nekad nezavisan a nekad zavisna, 4) uvek generatoran.

17. ⓐ Ako je uređena trojka vektora (a, b, c) zavisna, tada je uređena trojka vektora $(a+b, a+c, a+2b-c)$ a) uvek nezavisna b) uvek zavisna c) nekada zavisna, a nekada nezavisna.

18. ⓐ Neka je $ABCD$ paralelogram, a tačka T težište trougla BCD (BD je dijagonala paralelograma). Izraziti vektor $\vec{DT}$ kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{a} = \vec{AB}$ i $\vec{b} = \vec{BC}$.

$$\vec{DT} = \frac{1}{3} \vec{a} - \frac{2}{3} \vec{b}$$

19. ⓐ Neka je u sedmodimenzionalnom vektorskom prostoru V , k -torka vektora $(a_1, \dots, a_k)$ generatorna. Tada je uvek: 1) $k < 7$ 2) $k \leq 7$ 3) $k = 7$ 4) $k > 7$ 5) $k \geq 7$ 6) ništa od prethodnog

20. ⓐ Ako je $f: V \rightarrow W$ izomorfizam, tada je: 1) postoji f^{-1} 2) V i W su izomorfni 3) $V = W$ 4) za svaku nezavisnu n -torku vektora $(v_1, \dots, v_n)$ iz V , n -torka $(f(v_1), \dots, f(v_n))$ je nezavisna u W 5) za svaku zavisnu n -torku vektora $(v_1, \dots, v_n)$ iz V , n -torka $(f(v_1), \dots, f(v_n))$ je zavisna u W

21. ⓐ Koji od sledećih podskupova $U \subseteq \mathbb{R}^n = \{x = (x_1, \dots, x_n) \mid x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$ je podprostor: 1) $U = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1 = x_2 = \dots = x_n\}$ 2) $U = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1 = x_2 = \dots = x_n = n\}$ 3) $U = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 1\}$ 4) $U = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1 = 0\}$ 5) $U = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1 = 2x_2 = 3x_3 = \dots = nx_n\}$ 6) $U = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 0\}$ (gde je $x = (x_1, \dots, x_n)$)

22. ⓐ Potreban i dovoljan uslov da ravan α bude potprostor vektorskog prostora $\mathbb{R}^3$ je:

da sadrži koordinatni početak i tada je α potprostor dimenzije: 2

23. ⓐ Za proizvoljne kvadratne regularne matrice A, B, C reda $n > 1$ važi:

- 1) $A(BC) = (AB)C$ 2) $AB = BA$ 3) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ 4) $\det(AB) = \det(A) + \det(B)$ 5) $\det(AB) = \det(A) \det(B)$ 6) $(AB)^2 = A^2 B^2$ 7) $\det(A+B) = \det(A) + \det(B)$

24. Ⓞ Linearne transformacije f i g definisane su sa $f(x_1, x_2) = (x_1 - x_2, 2x_1 + x_2)$ i $g(x_1, x_2) = (x_1 - x_2, x_1 + x_2)$.
- a) Po definiciji kompozicije o odrediti $(f \circ g)(x_1, x_2) = f(g(x_1, x_2)) = (-2x_2, 3x_2)$
- b) Napisati matrice M_f i M_g koje odgovaraju linearnim transformacijama f i g
- $$M_f = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, M_g = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$
- c) Izračunati proizvod matrica $M_f \cdot M_g = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$, $M_g^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$ i $g^{-1}(x_1, x_2) = (-\frac{1}{6}x_1 + \frac{1}{3}x_2, -\frac{1}{2}x_1)$
- d) Napisati linearnu transformaciju $h(x_1, x_2)$ kojoj odgovara matrica $M_f \cdot M_g$ tj.
- $$h(x_1, x_2) = (-2x_2, 3x_2)$$
- e) Da li je $h = f \circ g$ tj. da li je $(\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}) h(x_1, x_2) = (f \circ g)(x_1, x_2)$? **(DA)** NE

25. Ⓞ Karakteristični polinom matrice $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ je: $\lambda^2 - 4$

26. Ⓞ Koje od tvrdjenja je tačno za bilo koje kvadratne matrice A, B reda 3 i svaki skalar λ
- a) $\det(A - B) = \det(A) - \det(B)$ b) $\det(\lambda A) = \lambda \det(A)$ **c) $\det(A^n) = (\det(A))^n$**
- Rad. 1. 2. 3. 4. 5.*

KOLOKVIJUM 2, PRIMER 20

1. Ⓞ Sistem linearnih jednačina $\begin{matrix} x + y + z = 1 \\ y + z = 1 \end{matrix}$ je
- 1) kontradiktoran, 2) određen, **3) 1 puta neodređen**, 4) 2 puta neodređen.
2. Ⓞ Neka je p prava čija je jednačina $x - 1 = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{-2}$. Napisati jedan vektor pravca prave p : $\vec{p} = (1, 2, -2)$, i koordinate jedne tačke prave p : $(1, -1, 0)$.
3. Ⓞ Za koje vrednosti parametra $a \in \mathbb{R}$ je sistem linearnih jednačina $x + ay = 0 \wedge x + ay = a$ nad poljem realnih brojeva: 1) neodređen: $a = 0$ 2) određen: $a \neq 0$ 3) kontradiktoran: $a \neq 0$
4. Ⓞ Za vektore $\vec{a} = (-2, 1, 1)$ i $\vec{b} = (4, -2, -2)$ izračunati:
- 1) $2\vec{a} + \vec{b} = (0, 0, 0)$ 2) $\vec{a} \cdot \vec{b} = -12$ 3) $\vec{a} \times \vec{b} = (0, 0, 0)$ 4) $|\vec{a}| = \sqrt{6}$
5. Ⓞ Koje su od sledećih uređenih n -torki baze vektorskog prostora $\mathbb{R}^3$: **1) $((0, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 0))$**
- ~~2) $((1, 0, 0), (0, -1, 0))$~~ ~~3) $((0, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 0), (1, 2, 3))$~~ ~~4) $((1, 1, 1), (2, 2, 2), (3, 3, 3))$~~
6. Ⓞ $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -1 & 3 \\ 13 & -6 & 8 \end{bmatrix}$ $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -1$ $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$
7. Ⓞ Napisati u obliku $Ax + By + Cz + D = 0$ jednačinu ravni koja sadrži tačku $(1, 2, 3)$ i paralelna je sa osama x i z , gde su A, B, C, D realni brojevi: $y - 2 = 0$
8. Ⓞ Ispod svake matrice napisati broj koji predstavlja njen rang.
- $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [2] \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$
- 3 2 2 1 1 2 2 1 0
9. Ⓞ Matrice linearnih transformacija $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (x + 2y, x - 3y)$ i $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $g(x, y, z) = (x, z)$
- su $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
- *****
10. Ⓞ Napisati $\vec{r}_p$ vektor položaja projekcije tačke $A(0, 0, 0)$ na pravu $p: \frac{x-3}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}$. $\vec{r}_p = (2, -1, -1)$
11. Ⓞ Za prave $m: \frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{5}$ i $n: \frac{x-5}{-6} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-5}{-1}$ važi:
- a) mimoilazne su ($m \cap n = \emptyset \wedge m \nparallel n$)
b) paralelne su i različite ($m \parallel n \wedge m \neq n$)
c) poklapaju se ($m = n$)
d) seku se ($m \cap n = \{M\}$)

12. • Odrediti vrednosti parametara $a, b \in \mathbb{R}$ za koje je sistem $\begin{cases} x + by = 1 \\ bx - ay = b \end{cases}$ (a) kontradiktoran:
(b) određen: $a \neq -b^2$
(c) 1 puta neodređen: $a = -b^2$
(d) 2 puta neodređen:
13. • Za koje $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ su vektori $\vec{a} = (1, 2, 3)$ i $\vec{b} = (1, \alpha, \beta)$: 1) nekolinearni ~~1) nekolinearni~~ 2) ortogonalni ~~2) ortogonalni~~
14. • Neka je $a = (0, 0, 0)$, $b = (1, 0, 1)$, $c = (1, 0, -1)$, $d = (-1, 0, 1)$, $e = (1, 1, 1)$, $f = (1, 0, 0)$, $g = (2, 0, 2)$.
Odrediti dimenzije sledećih potprostora V vektorskog prostora $\mathbb{R}^3$:
1) $V = L(a) \Rightarrow \dim(V) = \underline{0}$ 2) $V = L(a, b) \Rightarrow \dim(V) = \underline{1}$
3) $V = L(a, b, c) \Rightarrow \dim(V) = \underline{2}$ 4) $V = L(b, c, d) \Rightarrow \dim(V) = \underline{2}$
5) $V = L(b, c, e) \Rightarrow \dim(V) = \underline{3}$ 6) $V = L(e, f, g) \Rightarrow \dim(V) = \underline{3}$
15. • Ako su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ različiti nekolinearni vektori, tada su vektori $\vec{m} = |\vec{a}|\vec{b} - |\vec{b}|\vec{a}$ i $\vec{n} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} + \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$
1) kolinearni 2) ortogonalni 3) ni kolinearni ni ortogonalni.
16. • Potreban i dovoljan uslov da prava p bude potprostor vektorskog prostora $\mathbb{R}^3$ je: da postoji tačka u p
i tada je p potprostor dimenzije: 1
17. • Koje od tvrđenja je tačno ako je A kvadratna matrica reda $n > 1$: 1) $\text{Rang}(A) = 0 \Leftrightarrow \det(A) = 0$
2) $\det(A) = 0 \Leftrightarrow \text{Rang}(A) \leq n$ 3) $\text{Rang}(A) = n \Rightarrow \det(A) > 0$, 4) $\text{Rang}(A) = n \Rightarrow \det(A) \neq 0$.
18. • Koji od vektora su karakteristični vektori za matricu $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$? 1) $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ 2) $\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$ 3) $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$.
19. • Izračunati α i β ako je $\alpha(1, -3, 2) + \beta(3, 7, -3) = (0, 0, 0)$: $(\alpha, \beta) \in \{ (0, 0) \}$
20. • Izračunati α i β ako je $\alpha(1, -3, 2) + \beta(2, -6, 4) = (0, 0, 0)$: $(\alpha, \beta) \in \{ \lambda(-1, 1) | \lambda \in \mathbb{R} \}$
21. • Neka je $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ uređena trojka nekoplanarnih slobodnih vektora. Tada: 1) trojka $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ je uvek linearno nezavisna 2) trojka $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ je uvek linearno zavisna 3) postoji takav vektor $\vec{d}$ da je četvorka $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d})$ nezavisna 4) postoji takav vektor $\vec{d}$ da je četvorka $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d})$ zavisna 5) za svaki vektor $\vec{d}$ je četvorka $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d})$ nezavisna 6) za svaki vektor $\vec{d}$ je četvorka $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d})$ zavisna 7) svaki vektor $\vec{d}$ je linearna kombinacija uređene trojke vektora $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$
22. • Neka su $\mathbf{a}_1 = (a_{11}, \dots, a_{1n})$, $\mathbf{a}_2 = (a_{21}, \dots, a_{2n})$, ..., $\mathbf{a}_n = (a_{n1}, \dots, a_{nn})$ vektori vrste matrice $A = A_{nn} = [a_{ij}]_{nn}$ i neka je $V = \text{Lin}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n) = \{ \alpha_1 \mathbf{a}_1 + \alpha_2 \mathbf{a}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{a}_n | \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \}$. Tada
1) $\det A \neq 0 \Leftrightarrow \text{rang } A < n$ 2) $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n)$ je zavisna akko $\det A = 0$ 3) $\dim V \neq 0 \Leftrightarrow \text{rang } A \geq 1$
4) $\det A \neq 0 \Leftrightarrow \dim V < n$ 5) $\det A \neq 0 \Leftrightarrow \text{rang } A \leq n$ 6) $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n)$ je zavisna akko $\text{rang } A < n$
23. • U vektorskom prostoru svih slobodnih vektora, uređen par vektora (a, b) je:
1) uvek nezavisan, 2) uvek zavisna, 3) nekad nezavisan a nekad zavisna, 4) uvek generatoran.
24. • Ako je uređena trojka vektora (a, b, c) zavisna, tada je uređena trojka vektora $(a+b, a+c, a+2b-c)$
a) uvek nezavisna b) uvek zavisna c) nekada zavisna, a nekada nezavisna.
25. • Neka je $ABCD$ paralelogram, a tačka T težište trougla BCD (BD je dijagonala paralelograma). Izraziti vektor $\vec{DT}$ kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{a} = \vec{AB}$ i $\vec{b} = \vec{BC}$.
$$\vec{DT} = \frac{2}{3} \vec{a} - \frac{1}{3} \vec{b}$$
26. • Neka je u sedmodimenzijskom vektorskom prostoru V , k -torka vektora $(a_1, \dots, a_k)$ generatorna. Tada je uvek: 1) $k < 7$ 2) $k \leq 7$ 3) $k = 7$ 4) $k > 7$ 5) $k \geq 7$ 6) ništa od prethodnog
27. • Ako je $f: V \rightarrow W$ izomorfizam, tada je: 1) postoji f^{-1} 2) V i W su izomorfni 3) $V = W$
4) za svaku nezavisnu n -torku vektora $(v_1, \dots, v_n)$ iz V , n -torka $(f(v_1), \dots, f(v_n))$ je nezavisna u W
5) za svaku zavisnu n -torku vektora $(v_1, \dots, v_n)$ iz V , n -torka $(f(v_1), \dots, f(v_n))$ je zavisna u W
28. • Potreban i dovoljan uslov da ravan α bude potprostor vektorskog prostora $\mathbb{R}^3$ je: da postoji tačka u α
i tada je α potprostor dimenzije: 2

29. Za proizvoljne kvadratne regularne matrice A, B, C reda $n > 1$ važi:
- ~~1)~~ $A(BC) = (AB)C$ ~~2)~~ $AB = BA$ ~~3)~~ $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ ~~4)~~ $\det(AB) = \det(A) + \det(B)$
~~5)~~ $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ ~~6)~~ $(AB)^2 = A^2B^2$ ~~7)~~ $\det(A+B) = \det(A) + \det(B)$

30. Linearne transformacije f i g definisane su sa $f(x_1, x_2) = (x_1 - x_2, 2x_1 + x_2)$ i $g(x_1, x_2) = (x_1 - x_2, x_1 + x_2)$.

a) Po definiciji kompozicije o odrediti $(f \circ g)(x_1, x_2) = f(g(x_1, x_2)) = (-2x_2, 3x_1 - x_2)$

b) Napisati matrice M_f i M_g koje odgovaraju linearnim transformacijama f i g

$$M_f = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, M_g = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

c) Izračunati proizvod matrica $M_f \cdot M_g = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$, $M_g^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$ i $g^{-1}(x_1, x_2) = (-\frac{1}{6}x_1 + \frac{1}{3}x_2, -\frac{1}{2}x_1)$

d) Napisati linearnu transformaciju $h(x_1, x_2)$ kojoj odgovara matrica $M_f \cdot M_g$ tj.

$$h(x_1, x_2) = (-2x_2, 3x_1 - x_2)$$

e) Da li je $h = f \circ g$ tj. da li je $(\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}) h(x_1, x_2) = (f \circ g)(x_1, x_2)$? **(DA)** NE

31. Karakteristični polinom matrice $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ je: $\lambda^2 - 4$

32. Koje od tvrđenja je tačno za bilo koje kvadratne matrice A, B reda 3 i svaki skalar λ

- ~~a)~~ $\det(A - B) = \det(A) - \det(B)$ ~~b)~~ $\det(\lambda A) = \lambda \det(A)$ **c)** $\det(A^n) = (\det(A))^n$

